

Lire
la première partie
de la thèse

SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces : ISS

N OUS DISPOSONS maintenant d'un système fermé pour la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces. Cependant, la résolution de ce système nécessite de localiser la position de la discontinuité pour estimer les termes sous-maille. De plus, il faudrait pour résoudre numériquement ce système développer une méthode de type interface diffuse. Or, pour que ces méthodes soient intéressantes (non diffusives avec un coût numérique acceptable), il faut minimiser la discrétisation des profils des grandeurs dans la zone de transition en introduisant des mécanismes physiques de relaxation ce qui implique un important travail théorique préalable. Il est donc intéressant de formuler directement le problème avec une vision discontinue des interfaces afin de pouvoir utiliser la méthode numérique dont nous disposons. Cet intérêt pragmatique se double d'un intérêt théorique : quelle conditions de saut vérifient les champs filtrés ? Pour répondre à cette question, on va utiliser les outils de la SND qui permettent d'expliquer les conditions de saut du formalisme monofluide à partir d'une modélisation continue des interfaces. Ces outils sont principalement les développements asymptotiques raccordés (DAR). Nous présenterons d'abord rapidement ces outils puis nous les appliquerons aux équations de la SGE diphasique.

6.1 Intérêt d'une formulation discontinue

6.1.1 Intérêt théorique

En appliquant le filtre à cheval sur la discontinuité, on l'a transformée en une zone continue de transition. Cependant, dans ce cas et contrairement au modèle d'interface diffuse [41], le profil des grandeurs à travers cette zone de transition ne peut pas s'interpréter physiquement. Puisque le système d'équations que nous avons établi est issu d'un formalisme discontinu, il semble judicieux de le comparer au système dont on est parti et donc de revenir à une vision discontinue des interfaces. En particulier, on désire savoir quelles conditions de saut vérifient les grandeurs filtrées et en quoi elles diffèrent des conditions de saut des grandeurs d'origine. De façon générale, on part de deux sous-domaines couplés à leur frontière commune et on cherche à déterminer le couplage qu'il faut appliquer si l'on sous-résout.

6.1.2 Intérêt pratique

L'allure des termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques (par exemple, celui issu de l'accélération dans l'équation de bilan de quantité de mouvement) est représentée sur la figure 5.9(d). Si on désire résoudre numériquement le système (5.72), il faut donc être capable de capturer ce type de profil à l'intérieur de la zone de transition. Ceci pose deux problèmes. Le premier problème consiste à ne pas diffuser ce profil de façon à ce que l'épaisseur sur laquelle le terme est non nul reste bornée. Pour éviter ce problème de diffusion, les méthodes à interface diffuse introduisent, grâce à des considérations thermodynamiques, des mécanismes physiques de relaxation vers un profil d'équilibre. Une autre solution est de développer des schémas numériques non diffusifs. Mais, dans les deux cas, la solution n'est pas immédiate. Le deuxième problème est le coût numérique nécessaire à la discrétisation de ce profil. En effet, les termes sous-maille varient fortement sur une petite épaisseur, ce qui impose *a priori* une taille de mailles trop faible pour être compatible avec l'objectif initial de SGE. L'intérêt du formalisme discontinu est de supprimer ces deux problèmes en ramenant la zone de transition à une surface infiniment mince. Il n'y a alors plus de problème de diffusion, car on peut utiliser les méthodes numériques de SND capables de gérer les discontinuités. Il n'est plus question de mailler finement la zone de transition, car on a transformé les forces volumiques de la zone de transition en forces surfaciques. Enfin, les modèles que nous avons proposés nécessitent de localiser précisément l'interface. Bien que nous ayons déterminé le lien entre zone de transition et position de la discontinuité au paragraphe 5.9, la reconstruction d'une interface en fonction de la courbure risque d'être un problème numérique conséquent. Au contraire, il est facile à partir de la formule (5.83) de reconstruire le profil de la fonction indicatrice de phase filtrée à partir de la position de la discontinuité.

Dans ce chapitre, on présente les outils qui permettent de déterminer un système discontinu équivalent à un problème continu dont les grandeurs varient continûment dans la zone de transition. On les utilise pour déterminer les conditions de saut à l'interface dans le cadre de la SGE pour les écoulements diphasiques. On aboutit ainsi à un système d'équations directement utilisable par n'importe quelle méthode de SND basée sur le formalisme discontinu.

6.2 Présentation des méthodes pour le passage d'une vision continue à une vision discontinue des interfaces

Physiquement, une interface entre deux phases est une zone de transition où, la masse volumique, par exemple, varie continûment. Pourtant, comme l'épaisseur de cette zone de transition est très petite, on représente généralement les interfaces par des surfaces de discontinuité et on détermine les conditions de saut à imposer aux interfaces de façon à respecter la physique à l'échelle moléculaire. Les équations du formalisme monofluide que nous avons décrites au chapitre 1, peuvent être obtenues de cette façon [2]. En les filtrant pour établir un système de la SGE diphasique, on retombe sur une zone volumique de transition dont l'épaisseur est deux fois la taille du filtre. Pour des raisons de coût numérique, on a intérêt en SGE à ce que la taille de la maille soit aussi proche que possible de la taille du filtre. Ainsi, comme pour la SND, on désire ne pas avoir à décrire la physique de cette zone de transition et on cherche les conditions de saut qu'il faut imposer aux interfaces pour tenir compte de cette physique dans une représentation discontinue.

Nous allons décrire les deux méthodes que nous avons utilisées pour déterminer les équations du concept ISS. Nous les illustrerons par des exemples connus en SND afin de

faire un parallèle avec notre démarche.

6.2.1 Analyse générique des processus interfaciaux

Principe de la méthode

La méthode que l'on présente rapidement ici est décrite en détail dans l'ouvrage de Edwards *et al.* [23]. Cette analyse distingue deux types de représentations des interfaces suivant la distance où se place l'observateur. Edwards parle de représentation *macroscopique* lorsque l'observateur n'est pas capable de distinguer les longueurs de l'ordre de l'épaisseur de la zone de transition et voit alors un champ, $\tilde{\phi}$, discontinu à l'interface. Il parle de représentation *microscopique* lorsque l'observateur ne voit pas d'interface mais une zone volumique de transition et un champ, $\bar{\phi}$, qui varie continûment. Les champs $\bar{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ ne diffèrent que dans la zone de transition (*i.e.* à proximité de l'interface) comme l'illustre la figure 6.1. Le lien entre les champs microscopique et macroscopique se fait grâce à la notion de grandeur en excès. La valeur en excès d'une grandeur est l'intégrale de la différence entre les représentations microscopique et macroscopique dans la zone interfaciale et par unité de surface. On la note $(\bar{\phi})^{ex}$

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex} dS = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dV \quad (6.1a)$$

où V est le volume de contrôle défini dans la zone interfaciale et A la portion d'interface incluse dans ce volume. Lorsque le rapport de l'épaisseur de la zone de transition¹ δ et de l'échelle de grandeur macroscopique, par exemple le rayon de courbure de l'interface R_b , tend vers zéro, on a deux autres définitions équivalentes pour les champs surfaciques $(\bar{\phi})^{ex}$. On peut définir la grandeur en excès à partir du flux de la grandeur $\bar{\phi}$ à travers la frontière ∂V du volume de contrôle V . En notant ∂A le contour de la surface A incluse dans ce volume, on a :

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} d\mathbf{L} = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\mathbf{S} \quad (6.1b)$$

La relation suivante est encore vérifiée

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\xi_3 \quad (6.1c)$$

où ξ_3 représente la distance signée à l'interface. Dans l'annexe B, on discute de l'équivalence de ces trois définitions dans le cas d'une interface sphérique (voir aussi [23]). Graphiquement, cette grandeur en excès est représentée par la partie hachurée de la figure 6.1. Elle est associée à l'interface et permet d'exprimer les conditions de saut des grandeurs macroscopiques.

L'avantage de cette approche réside dans son caractère générique. Une fois les règles pour déterminer les équations des grandeurs en excès établies, on peut les appliquer à des équations de bilan générique comme le font Edwards *et al.* [23]. Elle permet donc de connaître rapidement la forme générale des conditions de saut. En revanche, puisque les valeurs en excès dépendent des grandeurs microscopiques, les conditions de saut que l'on obtient ne sont pas fermées. Cette analyse nécessite donc une étape de modélisation supplémentaire pour fermer le problème. Bien que moins générique, la méthode des développements asymptotiques raccordés inclut l'étape de modélisation et aboutit à un problème fermé.

¹La zone de transition est la zone où les grandeurs microscopique et macroscopique diffèrent.

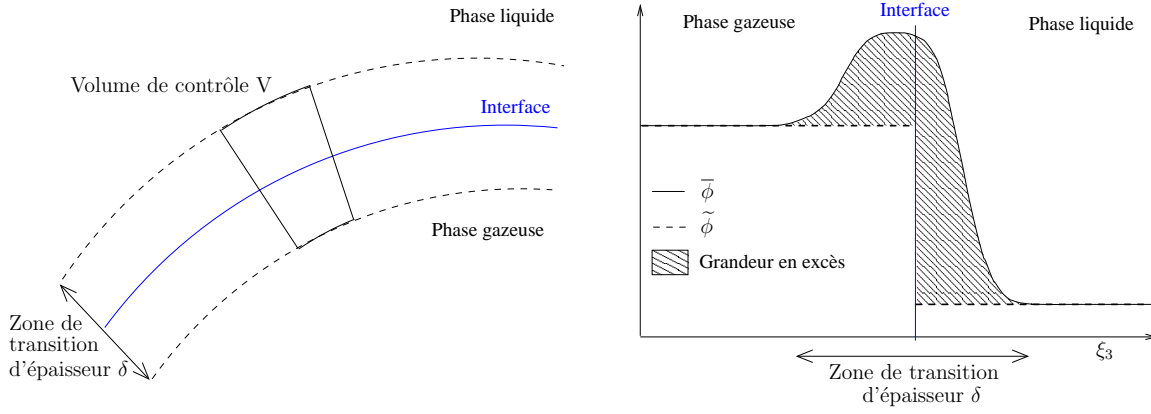


FIG. 6.1 – Définition du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et d'une grandeur en excès

Origine volumique de la tension de surface

Pour illustrer la méthode générique d'analyse des processus interfaciaux, on présente le cas de la tension interfaciale. Dans le cadre d'un modèle d'interface diffuse, on peut montrer que l'équation de bilan de quantité de mouvement se met sous la forme suivante

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = -\nabla \cdot (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) \quad (6.2)$$

où $\bar{\rho}$ est la masse volumique du fluide, \bar{p} sa pression, $\bar{\mathbf{u}}$ sa vitesse, λ le coefficient de capillarité interne supposé constant pour des raisons de simplicité et où $d/dt \equiv \partial/\partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla$ est la dérivée convective. Le tenseur non sphérique $\lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}$ est le tenseur de Korteweg qui permet de comprendre l'origine volumique de la tension de surface comme on le montre par la suite. On s'intéresse au système à l'équilibre. L'équilibre est caractérisé par une vitesse nulle. L'équation de bilan de quantité de mouvement se met alors sous la forme :

$$\nabla \cdot (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) = 0 \quad (6.3)$$

Cette équation est l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre pour l'échelle microscopique. L'application de la méthode présentée sur des équations génériques par Edwards *et al.* [23] à cette équation particulière est relativement immédiate et on peut trouver directement le résultat. On choisit ici de détailler les différentes étapes de raisonnement afin d'illustrer la philosophie de la méthode. Puisque, loin des interfaces, la masse volumique est constante par phase, le champ macroscopique de la pression, \tilde{p}_k , vérifie dans chacune des phases ($k = l$ dans la phase liquide et $k = g$ dans la phase gazeuse) à l'équilibre :

$$\nabla \cdot (\tilde{p}_k \mathbf{I}) = 0 \quad (6.4)$$

Cette équation est l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre pour l'échelle macroscopique. Soit V le volume de contrôle représenté par la figure 6.2. On décompose ce volume de contrôle de la façon suivante :

$$V = \bar{V}_I \oplus \bar{V}_{II} \oplus A \quad (6.5)$$

Le volume \bar{V}_I est associé à la phase liquide ($k = l$) et \bar{V}_{II} à la phase gazeuse ($k = g$). A représente la surface de l'interface comprise dans le volume V . On note ∂V la frontière du volume V et $\partial \bar{V}_I$ (respectivement $\partial \bar{V}_{II}$) la frontière du volume \bar{V}_I (respectivement \bar{V}_{II}).

Le membre de droite de l'expression précédente se réécrit en utilisant le théorème de la divergence surfacique (voir paragraphe C.10 de l'annexe C)

$$\int_{\partial A} \left((\bar{p})^{ex} \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p})^{ex} \right) \cdot d\mathbf{L} = \int_A \nabla_s \cdot \left(\mathbf{P} \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{I}) + \mathbf{P} \cdot (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p})^{ex} \right) dA \quad (6.12)$$

où $\nabla_s \cdot$ est l'opérateur de divergence surfacique et \mathbf{P} est le projecteur sur la surface². Ces deux opérateurs sont définis respectivement au paragraphe C.5.2 et par l'équation (C.23) dans l'annexe C. Puisqu'à l'équilibre, $\nabla \bar{p}$ est un vecteur normal à l'interface, on peut écrire :

$$\nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p} = \|\nabla \bar{p}\|^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (6.13)$$

De plus, $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0$, donc l'équation (6.11) devient :

$$\int_{\partial V} \left((\bar{p} - \tilde{p}) \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p} - 0) \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_A \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) dA \quad (6.14)$$

En égalant le membre de droite de cette dernière expression à celui de l'équation (6.10), on trouve :

$$- \int_A [\tilde{p}] \mathbf{n} dA = \int_A \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) dA \quad (6.15)$$

Ce résultat étant valable pour toute portion A de l'interface, on a finalement :

$$- [\tilde{p}] \mathbf{n} = \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) \quad (6.16)$$

Par définition de la courbure moyenne κ et du projecteur sur la surface \mathbf{P} , on a l'égalité :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{P} = \kappa \mathbf{n} \quad (6.17)$$

Enfin, à l'équilibre, la pression \bar{p} est indépendante des coordonnées tangentielles à l'interface, elle ne dépend que de la distance à l'interface³. Par conséquent, à l'équilibre, le gradient surfacique, ∇_s , de la grandeur en excès de la pression est nul :

$$\nabla_s (\bar{p})^{ex} = 0 \quad (6.18)$$

Ainsi, en notant la tension de surface

$$\sigma \hat{=} (\bar{p})^{ex} \quad (6.19)$$

et en décomposant le membre de droite de l'équation (6.16), on retrouve la relation de Laplace :

$$- [\tilde{p}] \mathbf{n} = \sigma \kappa \mathbf{n} \quad (6.20)$$

A partir d'une description continue de la physique des interfaces, nous avons montré comment l'analyse générique des processus interfaciaux permet, en faisant des bilans sur des volumes de contrôle, de déterminer la forme générale des conditions de saut d'un problème discontinu équivalent. Sans refaire toutes les étapes du raisonnement précédent, nous utiliserons la philosophie de cette méthode pour trouver les conditions de saut des équations de la SGE diphasique à partir de la description continue que nous avons établie au chapitre précédent.

²Le projecteur sur la surface \mathbf{P} correspond à l'opérateur identité pour les champs surfaciques tangents. C'est la raison pour laquelle il est parfois noté \mathbf{I}_s .

³Le fait que la pression soit indépendante des coordonnées tangentielles est cohérent avec l'hypothèse que le gradient de masse volumique est un vecteur normal.

6.2.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Principe de la méthode

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet de trouver les solutions approchées d'équations différentielles où deux échelles de longueurs d'ordre de grandeur très différent interviennent. Lorsque l'on adimensionnalise les équations, le rapport de ces deux échelles de longueur fait apparaître un petit paramètre que l'on notera ϵ . Dans notre cas, la petite échelle de longueur correspond à la taille du filtre, c'est-à-dire la taille de l'interface épaissie (car filtrée). Elle est donc égale à l'épaisseur de la zone de transition entre les deux phases monophasiques. On la note δ . Toujours dans notre cas, la grande échelle de longueur est le rayon de la sphère osculatrice de la bulle. On le note R_b . Finalement, on a : $\epsilon = \frac{\delta}{R_b}$. La première étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à séparer le domaine en différentes sous-régions : les régions *extérieures* où les grandeurs varient lentement et une région *intérieure* où les grandeurs varient rapidement. Les régions extérieures sont bien sûr les parties monophasiques du domaine et la région intérieure correspond à la zone de transition qui se situe en proche interface. Un bon exemple de grandeur dont les variations sont soit lentes, soit rapides, suivant la région où l'on se trouve, est la masse volumique. En effet, on la suppose constante dans les régions extérieures et elles varient rapidement dans la région intérieure (voir fig. 5.3, 5.5 et 5.29(b) du chapitre précédent). Dans la deuxième étape de cette méthode, on effectue, dans la région intérieure, un changement de variable suivant la direction normale afin de tenir compte des variations rapides des grandeurs physiques. Cela revient à dilater la direction normale et donc, à lui donner une importance prédominante par rapport aux directions tangentielles. Les équations différentielles sont alors écrites à différents ordres à l'aide d'un développement asymptotique en ϵ . On les résout séparément dans chacune des régions, extérieures et intérieure. La dernière étape consiste à raccorder les solutions obtenues dans les différentes régions grâce aux conditions de raccord (on les explicite au paragraphe 6.4.5) valable quand ϵ tend vers zéro [104]. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la zone de transition tend vers une surface de discontinuité. Les solutions des régions extérieures sont les solutions approchées de ce nouveau problème discontinu. On l'appelle problème discontinu équivalent car il ne diffère du précédent que dans la zone de transition. Ainsi, à partir de la résolution d'une équation différentielle simplifiée dans la région intérieure, on dérive analytiquement les conditions de saut à appliquer entre les solutions des problèmes des régions extérieures.

Un exemple simple

Cette méthode nous permettra d'exprimer les conditions de saut des grandeurs filtrées à appliquer à l'interface. On disposera alors d'un système d'équations pour la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces. Avant d'appliquer cette méthode à l'étude complexe des écoulements diphasiques et turbulents, on la présente sur un exemple simple pour illustrer les différentes étapes que nous venons de décrire. On se place dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à l'interface discontinue équivalente. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Dans l'annexe C, on définit plus complètement ce système de coordonnées. L'interface est située en $\xi_3 = 0$, la phase gazeuse (indice g) pour $\xi_3 < 0$ et la phase liquide (indice l) pour $\xi_3 > 0$. On suppose que le champ de vitesse filtrée est monodimensionnel,

stationnaire, qu'il dépend uniquement de ξ_3 et qu'il est la solution du système suivant :

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi_3}(\xi_3, \epsilon) \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2} - \bar{u}(\xi_3, \epsilon) = 0 \quad (6.21a)$$

$$\bar{u}(1, \epsilon) = 1 \quad (6.21b)$$

Dans le cas de système très simple, on trouve facilement la solution exacte :

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \frac{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2}}{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (6.22)$$

Première étape : définition des différentes régions La région intérieure est ici le voisinage de l'origine. Les régions extérieures sont de part et d'autre du plan $\xi_3 = 0$ pour ξ_3 suffisamment grand.

Deuxième étape : changement de variable et développement en ϵ Comme on s'attend à des variations d'ordre 1 dans la région intérieure, on effectue le changement de variable suivant :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon} \quad (6.23a)$$

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) \quad (6.23b)$$

En introduisant cette nouvelle variable ξ dans l'équation (6.21a), on trouve :

$$\frac{d\check{\bar{u}}}{d\xi}(\xi, \epsilon) \sqrt{\xi^2 + 1} - \check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) = 0 \quad (6.24)$$

Pour résoudre cette équation, on cherche généralement la solution sous la forme d'un développement en ϵ :

$$\check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) = \check{\bar{u}}^0(\xi) + \epsilon \check{\bar{u}}^1(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.25)$$

A l'ordre 0, l'équation (6.24) s'écrit pour la région intérieure :

$$\frac{d\check{\bar{u}}^0}{d\xi}(\xi) \sqrt{\xi^2 + 1} - \check{\bar{u}}^0(\xi) = 0 \quad (6.26)$$

En faisant le changement de fonction inconnue $\check{\bar{u}}^0(\xi) = e^{f(\xi)}$, on se ramène à :

$$\frac{df}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (6.27)$$

Il faut alors faire appel à de vieux souvenirs

$$\frac{d\text{Argsh}}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (6.28a)$$

$$\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (6.28b)$$

où $\text{Argsh} = \text{sh}^{-1}$ avec $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Finalement, en notant c^0 la constante d'intégration de l'ordre 0, on a :

$$\check{\bar{u}}^0(\xi) = c^0(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}) \quad (6.29)$$

Pour résoudre l'équation dans les régions extérieures, on cherche également la solution sous la forme d'un développement en ϵ mais sans faire de changement de variable :

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \bar{u}^0(\xi_3) + \epsilon \bar{u}^1(\xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.30)$$

A l'ordre 0, l'équation (6.24) s'écrit pour les régions extérieures :

$$\frac{d\bar{u}^0}{d\xi_3}(\xi_3) |\xi_3| - \bar{u}^0(\xi_3) = 0 \quad (6.31)$$

Avec le même changement de fonction inconnue que pour la région intérieure, on trouve respectivement pour les phases gazeuses et liquides :

$$\bar{u}_g^0(\xi_3) = \frac{c_g^0}{\xi_3} \quad (6.32a)$$

$$\bar{u}_l^0(\xi_3) = c_l^0 \xi_3 \quad (6.32b)$$

A cette étape de la méthode, parmi les trois constantes d'intégration que nous avons introduites, seule celle correspondant à la solution dans la région extérieure liquide, c_l^0 , peut être déterminée. En effet, on ne dispose que d'une condition aux limites, $\bar{u}(1, \epsilon) = 1$, et elle concerne la région extérieure liquide. Elle fournit $c_l^0 = 1$. Les autres constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions de raccord.

Troisième étape : application des conditions de raccord L'interface étant située en $\xi_3 = 0$, le principe de raccord s'écrit (voir paragraphe 6.4.5) :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{u}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \bar{u}^0 \quad (6.33)$$

En l'appliquant d'abord côté liquide ($\xi_3 > 0$), on trouve que $c^0 = 0$ ce qui implique côté gaz ($\xi_3 < 0$) $c_g^0 = 0$. Finalement, on a les solutions suivantes :

$$\bar{u}^0(\xi) = 0 \quad \text{pour la région intérieure} \quad (6.34a)$$

$$\bar{u}_g^0(\xi_3) = 0 \quad \text{pour la région extérieure gazeuse } (\xi_3 < 0) \quad (6.34b)$$

$$\bar{u}_l^0(\xi_3) = \xi_3 \quad \text{pour la région extérieure liquide } (\xi_3 > 0) \quad (6.34c)$$

En faisant tendre ϵ vers zéro, on se ramène à un problème discontinu (la zone de transition est d'épaisseur nulle). La méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis de montrer, dans ce cas précis, qu'à l'ordre 0 le champ de vitesse est continu en valeur et discontinu en dérivée :

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \bar{u}_l^0 - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \bar{u}_g^0 = 0 \quad (6.35a)$$

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \frac{d\bar{u}_l^0}{d\xi_3} - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \frac{d\bar{u}_g^0}{d\xi_3} = 1 \quad (6.35b)$$

A l'ordre 1, les solutions dans les régions extérieures sont nulles, la solution dans la région intérieure est :

$$\bar{u}^1(\xi) = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}}{2} \quad (6.36)$$

La solution approchée (définie comme la somme des solutions intérieure et extérieures moins la valeur du raccord entre les solutions), \bar{u}_{app} est alors :

$$\bar{u}_{app}(\xi_3, \epsilon) = \frac{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2}}{2} \quad (6.37)$$

La figure 6.3 représente les solutions extérieures liquide et gazeuse, approchée et exacte pour $\epsilon = 0, 1$. On constate que les solutions extérieures sont de très bonnes approximations de la solution exacte dès que l'on est suffisamment loin de l'interface.

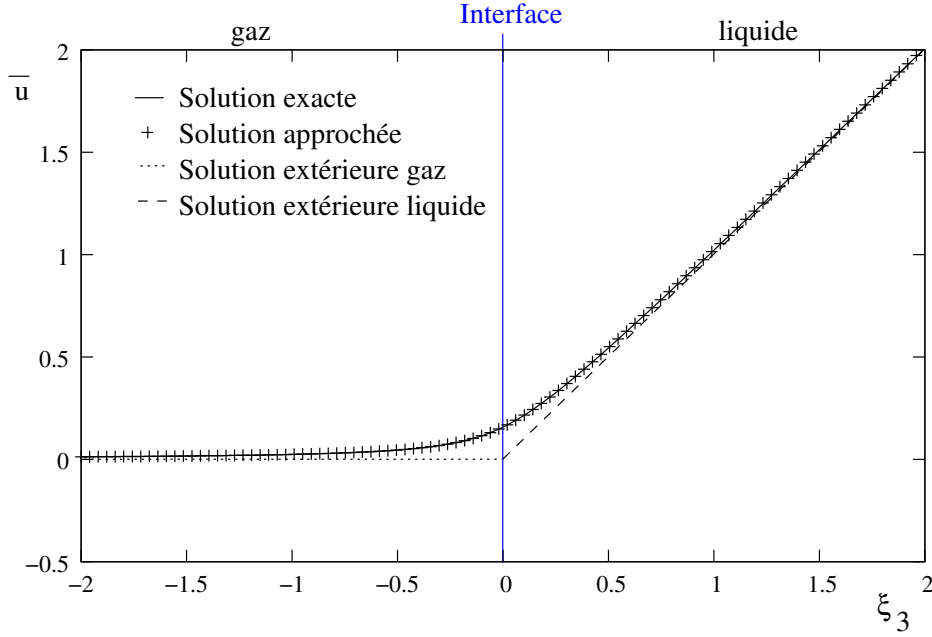


FIG. 6.3 – Solutions d'un problème discontinu équivalent obtenues grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés

Finalement, en définissant le champ de vitesse du problème discontinu \tilde{u} comme l'ordre 0 du champ de vitesse des régions extérieures \bar{u}^0

$$\tilde{u} = \bar{u}^0, \quad (6.38)$$

on a établi le système discontinu équivalent suivant

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi_3}(\xi_3) |\xi_3| - \tilde{u}(\xi_3) = 0 \quad \text{pour } \xi_3 \neq 0 \quad (6.39a)$$

$$\tilde{u}(1) = 1 \quad (6.39b)$$

$$[\tilde{u}] = 0 \quad \text{pour } \xi_3 = 0 \quad (6.39c)$$

où $[\tilde{u}]$ représente le saut de vitesse.

Origine volumique de la tension de surface

L'exemple précédent est formel, l'équation différentielle dont on est parti était adimensionnée. Or, une des étapes préliminaires essentielles de la méthode des développements asymptotiques raccordés est l'étape d'adimensionnalisation. Afin d'illustrer cette étape ainsi que les similitudes entre l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des développements asymptotiques raccordés, on reprend l'exemple de l'origine volumique de la tension de surface. Avant d'adimensionnaliser l'équation (6.3), on la réécrit sous une forme équivalente mais plus simple à analyser mathématiquement. On montre facilement que :

$$\nabla \cdot (\nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) = \nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \quad (6.40)$$

En supposant comme précédemment que λ est une constante, l'équation (6.3) peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\nabla \bar{p} + \lambda \left(\nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \right) = 0 \quad (6.41)$$

La résolution de cette équation d'équilibre pour une interface plane⁴ fournit l'ordre de grandeur de la tension de surface (définie par la relation (6.19))

$$\sigma \sim \lambda \frac{[\bar{\rho}]}{\delta} \quad (6.42)$$

où $[\bar{\rho}] = \rho_l - \rho_g$ représente le saut de masse volumique et δ l'épaisseur de la zone de transition. L'ordre de grandeur de la pression s'exprime naturellement en fonction de la tension de surface, σ , et du rayon de courbure de la sphère osculatrice à l'interface, R_b :

$$\bar{p} \sim \frac{\sigma}{R_b} \quad (6.43)$$

En remplaçant, dans l'expression précédente, la tension de surface par son ordre de grandeur donné par l'équation (6.42), on trouve :

$$\bar{p} \sim \lambda \frac{[\bar{\rho}]}{R_b \delta} \quad (6.44)$$

En adimensionnalisant la pression comme nous venons de le préciser, la masse volumique $\bar{\rho}$ par le saut de masse volumique $[\bar{\rho}]$, et en prenant le rayon de courbure de la sphère osculatrice comme longueur caractéristique (on se sert de cette longueur pour adimensionnaliser les opérateurs de dérivation), on trouve la forme adimensionnée de l'équation (6.41)

$$\nabla \bar{p} + \epsilon \left(\nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \right) = 0 \quad (6.45)$$

avec

$$\epsilon = \frac{\delta}{R_b} \quad (6.46)$$

Pour des raisons de commodité de notation, on note les grandeurs adimensionnalisées comme les grandeurs elles-mêmes. Le paramètre adimensionné ϵ est très petit devant 1. C'est le petit paramètre des développements asymptotiques raccordés.

Comme dans l'exemple précédent, on utilise les coordonnées généralisée (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . On suppose que l'interface est située en $\xi_3 = 0$, la phase gazeuse (indice g) pour $\xi_3 < 0$ et la phase liquide (indice l) pour $\xi_3 > 0$.

Première étape : définition des différentes régions Comme on vient de le préciser, la région intérieure est ici le voisinage de l'origine $-\delta \leq \xi_3 \leq \delta$. Les régions extérieures vérifient respectivement $\xi_3 > \delta$ et $\xi_3 < -\delta$.

Deuxième étape : changement de variable et développement en ϵ Comme on s'attend à des variations d'ordre 1 dans la région intérieure, on effectue le changement de variable suivant :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon} \quad (6.47a)$$

$$\bar{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \check{\bar{p}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) \quad (6.47b)$$

$$\bar{\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \check{\bar{\rho}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) \quad (6.47c)$$

⁴On ne présente pas dans ce mémoire la résolution de cette équation d'équilibre pour une interface plane, mais on la trouvera par exemple dans [2].

Les variables du système sont alors elles aussi développées en ϵ :

$$\check{\bar{p}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \check{\bar{p}}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi) + \check{\bar{p}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.48a)$$

$$\check{\bar{\rho}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \check{\bar{\rho}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon \check{\bar{\rho}}^1(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.48b)$$

Il est important de noter que la pression et la masse volumique ne commencent pas au même ordre. C'est l'analyse des ordres de grandeur des variations de la pression et de la masse volumique sur la solution, pour une interface plane, de l'équation (6.3) qui permet de connaître *a priori* l'ordre le plus bas en ϵ de ces grandeurs (voir par exemple [2]). En introduisant cette nouvelle variable et ces développements en ϵ dans l'équation (6.45), on trouve dans la direction normale à l'interface :

– à l'ordre -1 en ϵ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} = 0 \quad (6.49a)$$

– à l'ordre 0 en ϵ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^0 + \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi^2} + (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} = 0 \quad (6.49b)$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures des directions principales ξ_1 et ξ_2 .

En utilisant simplement les règles de dérivation d'un produit,

$$\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (6.50a)$$

$$\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) \quad (6.50b)$$

les équations (6.49a) et (6.49b) se réécrivent respectivement

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^{-1} + \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) = 0 \quad (6.51a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^0 + 2 \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) + \kappa \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 = 0 \quad (6.51b)$$

où $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ est la courbure moyenne. Ces équations s'intègrent facilement et on trouve :

$$\check{\bar{p}}^{-1} = c^{-1}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (6.52a)$$

$$\check{\bar{p}}^0 = c^0(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} - \kappa \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (6.52b)$$

De même que pour le problème extérieur, la pression extérieure est développée en ϵ . C'est à nouveau la résolution du problème à l'équilibre pour une interface plane qui permet de connaître l'ordre le plus faible en ϵ du développement de la pression. Pour le problème extérieur, on commence à l'ordre 0 :

$$\bar{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \bar{p}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \epsilon \bar{p}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.53)$$

A l'ordre 0 en ϵ , l'équation projetée dans chacune des directions ξ_i s'écrit pour le problème extérieur :

$$\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial \xi_i} = 0 \quad (6.54)$$

Cette relation indique que la pression est uniforme au sein de chaque phase.

Troisième étape : application des conditions de raccord L'application des conditions de raccord (voir paragraphe 6.4.5) à l'ordre -1 en ϵ fournit $c^{-1} = 0$. A l'ordre 0, et en repassant sous forme dimensionnelle, on a :

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \bar{p}^0 - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \bar{p}^0 = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{p}^0 - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{p}^0 = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_3} \right)^2 d\xi_3 \quad (6.55)$$

Finalement, puisqu'à l'ordre -1

$$\sigma = (\bar{p}^{-1})^{ex} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial \xi_3} \right)^2 d\xi_3 \quad (6.56)$$

(voir eq. (6.19) et (6.52a) ainsi que la définition de la grandeur en excès (6.1c)), en posant $\tilde{p} = \bar{p}^0$, on trouve, à l'équilibre, au problème discontinu équivalent trivial suivant

$$\nabla \tilde{p} = 0 \quad \text{pour } \xi_3 \neq 0 \quad (6.57a)$$

$$[\tilde{p}] = \sigma \kappa \quad \text{en } \xi_3 = 0 \quad (6.57b)$$

où la dernière relation n'est autre que la relation de Laplace.

Par rapport à l'analyse générique des processus interfaciaux, la méthode des développements asymptotiques permet d'aller plus loin dans l'étape de fermeture du problème discontinu équivalent. En effet, l'analyse d'Edwards *et al.* [23] nous avait seulement permis d'exprimer le saut de pression du problème discontinu en fonction de la grandeur en excès associée à la pression de l'échelle microscopique. Avec les développements asymptotiques raccordés, on l'a déterminé en fonction des variations de la masse volumique et, en se donnant une loi d'état reliant la pression et la masse volumique, on pourrait fermer complètement le problème.

Analogie avec notre problème

La figure 6.4 trace, à l'ordre -1, l'allure de la pression à l'échelle microscopique. Nous avons vu que la grandeur en excès de la pression qui correspond à l'aire située sous la courbe était en fait la tension de surface. L'allure du terme sous-maille issu de la dérivée temporelle de l'équation de bilan de quantité de mouvement, τ_{temp} , (fig. 5.9(d)) est identique à celle de la pression à l'échelle microscopique (fig. 6.4). On s'attend à ce que la grandeur en excès de ce terme sous-maille intervienne dans l'expression des conditions de saut du problème discontinu équivalent. Puisque les valeurs asymptotiques sont égales de part et d'autre de la discontinuité (le terme sous-maille est nul loin des interfaces), la valeur de la grandeur en excès, qui lui est associée, est indépendante de la localisation de la discontinuité équivalente. On parle alors de grandeur intrinsèque. Lorsque la grandeur en excès dépend de la position de la discontinuité équivalente (c'est le cas pour la masse volumique par exemple), il faut faire intervenir des notions de conservation.

On a expliqué comment l'analyse générique des processus interfaciaux permet de déterminer la forme des conditions de saut que doit respecter le problème discontinu équivalent. Il est intéressant de remarquer que le formalisme monofluide permet, en écrivant les équations au sens des distributions, de reprendre la philosophie d'étude sous la forme de bilan sans écrire explicitement les intégrales. Ainsi, l'équivalent de la relation (6.9) s'obtient immédiatement au sens des distributions grâce au formalisme monofluide. Les deux étapes de bilan d'abord sur chacune des phases (6.7) puis sur le volume incluant l'interface (6.8) ont leur équivalent en formalisme monofluide. Elles correspondent respectivement à la multiplication d'une équation de la phase k par la fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_k$ et à la sommation

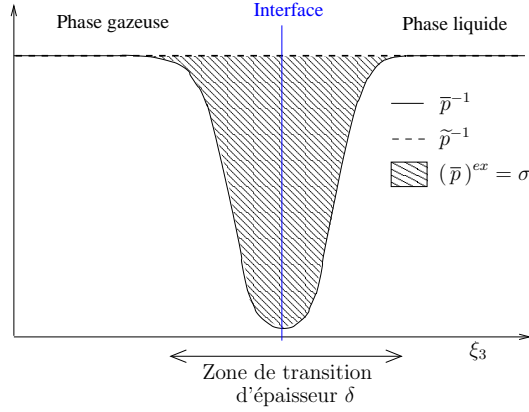


FIG. 6.4 – Allure du profil à l'équilibre de l'ordre -1 des champs de pression macroscopique et microscopique. Définition de la tension de surface comme une grandeur en excès

des équations de chacune des phases. En effet, en multipliant l'équation (6.4) par la fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_k$, on a dans chaque région extérieure ($k = l$ dans la phase liquide et $k = g$ dans la phase gazeuse) :

$$\nabla \cdot (\tilde{\chi}_k \tilde{p}_k \mathbf{I}) = \tilde{p}_k \nabla \tilde{\chi}_k \quad (6.58)$$

En ajoutant l'équation précédente écrite pour la phase liquide ($k = l$) et celle écrite pour la phase gazeuse ($k = g$), on retrouve bien l'équivalent de la relation (6.9) obtenue grâce à l'analyse générique des processus interfaciaux

$$\nabla \cdot (\tilde{p} \mathbf{I}) = [\tilde{p}] \mathbf{n} \delta_\sigma \quad (6.59)$$

où on a utilisé la propriété $\nabla \chi_g = -\mathbf{n} \delta_\sigma$ (avec δ_σ la fonction de Dirac associée à l'interface) et où $[\tilde{p}] = \tilde{p}_l - \tilde{p}_g$ représente le saut de pression. Il est important de noter que la dernière équation n'apporte aucune information nouvelle. Elle permet uniquement de savoir la forme des relations de saut que l'on cherche à fermer. On n'a pas déterminé à quoi doit être égal le saut de pression, on a simplement mis en évidence que l'on aura besoin de le préciser si on veut résoudre le problème discontinu. Etant donné deux domaines adjacents où on résout un système d'équations différentielles, le formalisme monofluide permet donc de préciser rapidement quelles relations de saut à la frontière des deux domaines on doit se donner pour fermer le problème.

Dans le paragraphe suivant, on écrit le système SGE diphasique que nous avons établi au chapitre précédent tel qu'il dégénère loin des phases, c'est-à-dire dans les régions extérieures. Puis, à l'aide du formalisme monofluide, on détermine la forme des conditions de saut que l'on cherche à déterminer grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés.

6.3 Objectifs

On cherche ici à résoudre un système équivalent au système établi au chapitre précédent. Pour ce nouveau système, on cherche à ramener la zone continue de transition à une simple discontinuité. *A priori*, on aboutit de cette façon à un problème similaire à celui que l'on aurait directement trouvé en appliquant séparément un filtre dans chacune des phases. Cette dernière façon de faire n'épaissit pas l'interface car aucun des volumes de prise de moyenne ne contient l'interface. Elle est cependant délicate car les volumes de prise de moyenne dépendent alors nécessairement du temps et de l'espace et le filtre ne commute donc plus avec les dérivées. De plus, il est difficile de définir dans ce contexte la notion d'interface filtrée. Ce sont ces

différentes raisons qui nous ont conduits à passer par l'étape précédente en faisant apparaître une zone continue de transition. Les équations que l'on doit résoudre dans chacune des phases loin de la discontinuité se déduisent du système (5.72) en prenant la masse volumique, ρ , et la viscosité, μ , constantes ainsi que $\overline{\delta_\sigma}$ nul puisqu'on est loin des interfaces. Le fait que la masse volumique soit constante dans les phases implique en particulier que le tenseur sous-maille issu de l'accélération est nul loin des interfaces $\frac{\partial \overline{\rho \mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0$. En notant respectivement la vitesse et la pression solution de ce nouveau problème $\widetilde{\mathbf{u}}_k$ et \widetilde{p}_k , on trouve donc respectivement pour l'équation de continuité et l'équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (6.60a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \widetilde{p}_k + \nabla \cdot (\mu_k (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \widetilde{\mathbf{u}}_k)) \\ &+ \nabla \cdot \left(\rho_k \left(\overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k} - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k} \otimes \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.60b)$$

Les équations précédentes correspondent aux équations de la SGE monophasique classique lorsque l'on fait l'hypothèse de similarité d'échelle. On désire résoudre ces équations jusqu'à la position de la discontinuité et non seulement loin de l'interface. Etant données les équations que l'on résout dans deux domaines adjacents, il faut alors trouver (i) la forme des conditions aux limites que l'on doit se donner, (ii) une fermeture de ces conditions aux limites pour que le problème soit fermé, (iii) le lieu où on impose ces conditions aux limites. Le problème ainsi défini est équivalent au problème continu (5.72). Comme nous l'avons illustré sur l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre (voir eq. (6.59)), le formalisme monofluide permet de réaliser l'étape (i), *i.e.* il permet de préciser la forme des conditions aux limites que l'on doit se donner. Dans la suite et afin d'alléger les équations, on adoptera les notations :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_k &\hat{=} \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k} - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k} \otimes \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k} \\ \widetilde{\mathcal{S}}_k &\hat{=} \mu_k (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \widetilde{\mathbf{u}}_k) \end{aligned}$$

En multipliant par la fonction indicatrice de phase du problème filtré discontinu, $\widetilde{\chi}_k$, chacune de ces équations et en les sommant, on a une première idée de la forme des conditions de saut qu'il nous faudra fermer

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} - \sum_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = 0 \quad (6.61a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{u}} \otimes \widetilde{\mathbf{u}}) &= -\nabla \widetilde{p} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathcal{S}}) \\ &+ \sum_k \left(\widetilde{p}_k \mathbf{I} - \widetilde{\mathcal{S}}_k \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \\ &+ \nabla \cdot \left(\widetilde{\rho} \widetilde{\mathcal{L}} \right) \\ &+ \sum_k \rho_k \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathcal{L}}_k \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \right) \end{aligned} \quad (6.61b)$$

où chaque grandeur monofluide $\widetilde{\phi}$ est définie par $\widetilde{\phi} \hat{=} \sum_k \widetilde{\chi}_k \widetilde{\phi}_k$. Ce système n'est pas fermé. En effet, on a fait apparaître la forme des relations de saut à l'interface mais, on ne peut pas à ce stade les exprimer en fonction de grandeurs monofluides : les termes de somme sur l'indice k font intervenir les grandeurs phasiques et non les grandeurs monofluides. Dans le cadre de l'analyse générique des processus interfaciaux, cette étape correspond à celle où on a uniquement travaillé sur les équations des régions extérieures. L'étape de fermeture utilise les équations du problème intérieur pour exprimer les conditions de saut en fonction des grandeurs en excès. On rappelle que dans le cas de la SND, on considère :

– l'équation de transport

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (6.62a)$$

– la relation de saut issue du bilan de masse

$$\sum_k \mathbf{u}_k \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (6.62b)$$

– la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement

$$\sum_k (p_k \mathbf{I} - \mathbf{S}_k) \cdot \nabla \chi_k = \sigma \nabla_s \cdot \mathbf{n} \quad (6.62c)$$

Les modèles de SND qui utilisent une représentation continue des interfaces fournissent des conditions de saut équivalente lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de la zone de transition vers zéro. L'objectif de ce chapitre est de déterminer les conditions de saut que fournissent les équations de la SGE avec une vision continue des interfaces lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de la zone interfaciale vers zéro : quel est l'équivalent des conditions de sauts (6.62) pour les grandeurs filtrées ? Comme on l'a fait apparaître dans le système (6.61), on cherche donc à préciser :

– la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente, $\widetilde{\chi}_k$

$$\frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \mathbf{v}_{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = 0 \quad (6.63a)$$

– la relation de saut issue du bilan de masse filtré

$$\sum_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \quad (6.63b)$$

– la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement filtré

$$\sum_k \left(\rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\widetilde{p}_k \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathcal{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \right) \quad (6.63c)$$

Trouver une fermeture des expressions (6.63b) et (6.63c) correspond à l'étape (ii) mentionnée ci-dessus. Exprimer la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente, $\widetilde{\chi}_k$, revient à réaliser l'étape (iii) puisque cette étape consiste à préciser le lieu où on impose les relations de saut. Cette étape est aussi délicate qu'essentielle. Elle est essentielle car un des premiers objectifs d'ISS est bien sûr de prédire précisément la position des interfaces. Son caractère délicat est lié au fait que la position de la discontinuité dépend de la courbure ainsi qu'à l'existence des corrélations entre la vitesse et la normale. Ce sont les deux raisons pour lesquelles, contrairement à la SND, on ne peut pas dans le cadre de la SGE diphasique, transporter l'interface avec la vitesse monofluide. Une grande partie de la suite de ce chapitre est dédiée à la détermination de la vitesse de l'interface filtrée $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$. L'analyse des processus interfaciaux s'appuyant sur la distinction de deux échelles de longueur permet d'exprimer ces sauts en fonction de grandeurs intégrales. Edwards *et al.* ([23, Chapitres 15-16]) appliquent cette méthode d'analyse à des équations bilans génériques (voir paragraphe 6.2.1). Cependant, ils ne proposent pas de fermeture pour les grandeurs intégrales. Chandesris et Jamet [12] reprennent cette philosophie d'étude pour déterminer les conditions aux limites entre un milieu libre et un milieu poreux. Pour fermer les grandeurs intégrales, ils utilisent la méthode des développements asymptotiques raccordés. La méthode des développements asymptotiques raccordés que l'on a décrite au paragraphe 6.2.2 est une méthode classiquement utilisée par la communauté *phase-field* [2] ainsi que par de nombreux autres auteurs [21, 103, 104]. Grâce à cette méthode, à ces conditions de raccord (voir paragraphe 6.4.5) et aux équations de la SGE continue (*i.e.* SND filtrée), on va préciser ces relations de saut ainsi que la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente $\widetilde{\chi}_k$.

6.4 Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés

6.4.1 Adimensionnalisation des équations

Les équations que l'on adimensionnalise sont celles du système de la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces (5.72). Les échelles caractéristiques du problème sont les suivantes :

- R_b , le rayon de la sphère osculatrice,
- V_T , la vitesse terminale de la bulle,
- δ , l'épaisseur de la zone de transition du problème filtré continu, *i.e.* la taille du filtre,
- g_n , la norme du vecteur gravité,
- ρ_l et μ_l la masse volumique et la viscosité dynamique de la phase liquide⁵.

On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

- $\nabla = \frac{1}{R_b} \nabla^+$,
- $\mathbf{u} = V_T \mathbf{u}^+$,
- $t = \frac{R_b}{V_T} t^+$,
- $t = \frac{\delta}{V_T} t_{interf}^+$,
- $p = \rho_l V_T^2 p^+$,
- $\rho = \rho_l \rho^+$ et $\mu = \mu_l \mu^+$.

On a introduit deux temps adimensionnels. Ceci est dû au fait que l'on considère **une seule** vitesse caractéristique et **deux** échelles de longueur. Le temps adimensionnel t_{interf}^+ n'intervient que lorsque les échelles de longueur concernées sont caractérisées par l'épaisseur de la zone de transition, δ . Ceci est typiquement le cas du modèle du terme de sous-maille τ_{temp} dans l'équation de bilan de quantité de mouvement (5.72c) et de l'indicatrice filtrée $\bar{\chi}_k$ dans l'équation de transport de l'interface (5.72b). Les nombres adimensionnels nécessaires à l'écriture des équations adimensionnalisées sont :

- $\epsilon = \frac{\delta}{R_b}$,
- $Re = \frac{\rho_l V_T R_b}{\mu_l}$, le nombre de Reynolds de bulle,
- $Fr = \frac{V_T}{\sqrt{g_n R_b}}$, le nombre de Froude,
- $We = \frac{\rho_l V_T^2 R_b}{\sigma}$, le nombre de Weber.

L'équation de bilan de quantité de mouvement (1.16c) s'écrit avec les choix précédents :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^+ \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot (\rho^+ \mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{u}^+) &= -\nabla^+ p^+ \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla^+ \cdot (\mu^+ (\nabla^+ \mathbf{u}^+ + \nabla^{+T} \mathbf{u}^+)) \\ &+ \frac{1}{Fr^2} \rho^+ \mathbf{g}^+ + \frac{\kappa^+}{We} \nabla^+ \chi_g \end{aligned} \quad (6.64)$$

⁵On choisit les grandeurs de la phase liquide pour adimensionnaliser nos équations car les nombres adimensionnels que l'on utilise dans ce mémoire et plus généralement dans la littérature consacrée aux écoulements à bulles, sont basés sur les grandeurs de la phase liquide.

Dans la suite, on omet l'exposant $+$ par souci de clarté. Comme la gravité ne pose pas de problème de modélisation, on se restreint (sans perte de généralité) à l'étude sans gravité. Les équations du système (5.72) s'écrivent avec les choix précédents :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.65a)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k + \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k = 0 \quad (6.65b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) &= -\nabla \bar{p} \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})) \\ &+ \frac{\kappa}{We} \nabla \bar{\chi}_g \end{aligned} \quad (6.65c)$$

L'apparition du facteur $\frac{1}{\epsilon}$, devant le premier terme du membre de gauche de l'équation de transport de la zone de transition (6.65b) et devant le second terme du membre de droite de l'équation de bilan de quantité de mouvement (6.65c), est dûe à leur échelle de longueur caractéristique. En effet, puisque ces deux termes n'existent que dans le problème intérieur (ils sont nuls dans les régions extérieures), leur échelle de longueur caractéristique est obligatoirement l'épaisseur de la zone de transition, δ . En revanche, le premier terme du membre de droite de l'équation de bilan de quantité de mouvement existe à la fois dans le problème intérieur et extérieur. Par conséquent, pour ce terme, on a le choix entre l'échelle de longueur macroscopique R_b et l'échelle de longueur microscopique δ . Puisque l'on concentre notre étude sur l'interface, on choisit de considérer que le caractère instationnaire de l'interface est prépondérant devant celui du champ de vitesse. On décide donc d'adimensionnaliser l'accélération en utilisant l'échelle de longueur macroscopique ce qui explique l'absence de facteur $\frac{1}{\epsilon}$ devant ce terme. Comme nous le verrons, ce choix a pour conséquence qu'à l'ordre 0 en ϵ l'interface se déplace alors que le champ de vitesse est stationnaire. Le caractère stationnaire de la vitesse simplifie bien sûr énormément les calculs qui suivent et qui sont déjà relativement fastidieux...

6.4.2 Choix du système de coordonnées

La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité dynamique $\bar{\mu}$ et la masse volumique $\bar{\rho}$ varie rapidement dans la direction normale à l'interface mais pas suivant les directions tangentielles. Pour dilater la direction normale à l'interface, on se place dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à l'interface discontinue équivalente. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Dans l'annexe C, on définit ce système de coordonnées et on réécrit les opérateurs gradient et divergence dans cette base.

6.4.3 Problème intérieur

Pour étudier le problème intérieur, une nouvelle variable d'espace est introduite :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon}, \quad \text{avec} \quad \epsilon \hat{=} \frac{\delta}{R_b} \quad (6.66)$$

On réécrit le système (6.65) en utilisant cette nouvelle variable d'espace. Ceci a pour conséquence de faire apparaître un facteur $1/\epsilon$ devant les dérivées suivant la direction normale. Soit ϕ une grandeur physique, on pose :

$$\check{\phi}(\xi_1, \xi_2, \xi) = \phi(\xi_1, \xi_2, \frac{\xi_3}{\epsilon}) \quad (6.67)$$

Dans la région intérieure, on cherche les solutions sous la forme :

$$\check{\phi}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \check{\phi}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon \check{\phi}^1(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon^2 \check{\phi}^2(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.68)$$

La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité et la masse volumique varie fortement dans la zone de transition dans la direction normale à l'interface. On fait l'hypothèse que ces variations sont en ξ_3/ϵ . Cela signifie simplement que ces variations sont indépendantes du facteur de dilatation ou encore que le développement en ϵ de $\check{\bar{\chi}}_k$ est réduit à l'ordre 0 : $\check{\bar{\chi}}_k = \check{\bar{\chi}}_k^0$.

Equation de continuité

Dans ce paragraphe et dans ceux qui suivent, on utilise les facteurs d'échelle de chaque direction principale, h_1 et h_2 , ainsi que les courbures principales, κ_1 et κ_2 (voir l'annexe C pour plus de détail). La notation $\check{\bar{u}}(i)$ désigne la composante i du vecteur $\check{\bar{\mathbf{u}}}$ dans le repère associé à l'interface, $\{\mathbf{g}_i\}$ (les directions 1 et 2 sont les directions principales de l'interface et la direction 3 est la direction normale à l'interface, voir annexe C). D'après l'équation (C.40) de l'annexe C, il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \check{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial \check{\bar{u}}(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial \check{\bar{u}}(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial \check{\bar{u}}(3)}{\epsilon \partial \xi} - \check{\bar{u}}(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) \right. \\ \left. - \epsilon \xi \left(\check{\bar{u}}(1) \frac{\partial \kappa_2}{\xi_1} + \check{\bar{u}}(2) \frac{\partial \kappa_1}{\xi_2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.69)$$

En injectant la relation (6.68) appliquée à $\phi = \bar{u}(i)$ dans l'équation (6.69) multipliée par $h_1 h_2$ et en utilisant le développement limité de h_i au premier ordre ($h_i = 1 - \epsilon \xi \kappa_i + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $i = 1, 2$), on a :

– à l'ordre 0

$$\frac{\partial \check{\bar{u}}^0(3)}{\partial \xi} = 0 \quad (6.70a)$$

– à l'ordre 1 (en utilisant (6.70a))

$$\frac{\partial \check{\bar{u}}^0(1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \check{\bar{u}}^0(2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \check{\bar{u}}^1(3)}{\partial \xi} - \check{\bar{u}}^0(3)(\kappa_1 + \kappa_2) = 0 \quad (6.70b)$$

Equation de bilan de quantité de mouvement

On note :

$$\mathbf{T} \hat{=} \overline{\rho \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (6.71a)$$

$$\mathbf{C} \hat{=} \overline{\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (6.71b)$$

$$\check{\mathbf{T}} \hat{=} \overline{\rho \check{\bar{\mathbf{u}}}} - \check{\bar{\rho}} \check{\bar{\mathbf{u}}} \quad (6.71c)$$

$$\check{\mathbf{C}} \hat{=} \overline{\rho \check{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \check{\bar{\mathbf{u}}}} - \check{\bar{\rho}} \check{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \check{\bar{\mathbf{u}}} \quad (6.71d)$$

6.4.4 Problème extérieur

Dans ce problème, on se place loin de la zone interfaciale. L'indicatrice de phase et par suite la masse volumique et la viscosité sont supposées constantes par phase. Les solutions du problème extérieur, $\bar{\mathbf{u}}_k$ et \bar{p}_k , sont recherchées sous la forme :

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \phi_k^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \epsilon \phi_k^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.76)$$

En injectant cette relation dans le système (6.65) et en constatant que l'indicatrice de phase constante fait dégénérer vers zéro certains termes sous-maille, on a :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (6.77a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \bar{p}_k \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho}_k (\bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k - \overline{\bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k})) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu}_k (\nabla \bar{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}_k)) \end{aligned} \quad (6.77b)$$

On remarque (sans surprise) que les termes qui dégènèrent vers zéro lorsqu'on se trouve loin de la zone interfaciale sont les termes interfaciaux. Dans l'équation de quantité de mouvement en particulier, il s'agit du terme qui avait un coefficient $\frac{1}{\epsilon}$ en facteur. De façon rassurante, on constate également que ce système correspond aux équations de la SGE monophasique classique lorsque l'on modélise les corrélations de la vitesse par l'hypothèse de similarité d'échelles.

6.4.5 Raccord entre la région intérieure et les régions extérieures

On détermine les conditions de raccord d'une grandeur ϕ (notée $\check{\phi}$ dans la région intérieure) en supposant que, pour les régions extérieures, l'interface est positionnée en $\xi_3 = 0$ et que, dans la région intérieure, on atteint asymptotiquement la valeur des régions extérieures :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \check{\phi} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi \quad (6.78)$$

Ceci signifie qu'on suppose le paramètre ϵ suffisamment petit pour que $\xi_3 \rightarrow 0$ alors que $\xi = \frac{\xi_3}{\epsilon} \rightarrow \infty$. Pour écrire les conditions de raccord aux différents ordre, on identifie les coefficients des polynômes en ϵ de $\check{\phi}$ et du développement limité de ϕ en 0. On trouve :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \check{\phi}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi^0 \quad (6.79a)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left(\check{\phi}^1 - \xi \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^0}{d\xi_3} \right) = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi^1 \quad (6.79b)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^0}{d\xi} = 0 \quad (6.79c)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^1}{d\xi} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^0}{d\xi_3} \quad (6.79d)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\check{\phi}^2}{d\xi} - \xi \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2\phi^0}{d\xi_3^2} \right) = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^1}{d\xi_3} \quad (6.79e)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2\check{\phi}^2}{d\xi^2} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2\phi^0}{d\xi_3^2} \quad (6.79f)$$

On trouvera le détail des développements limités justifiant ces conditions de raccord dans la thèse de C. Fouillet [30] et le livre de D. Zwillinger [104].

6.4.6 Relations de saut pour le problème extérieur à l'ordre 0

Conditions de saut sur la vitesse

L'ordre 0 de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (eqs. (6.73a) et (6.74a)) implique que

$$\check{\check{u}}^0(i)_{,3} = \frac{Cte_i}{\check{\check{\mu}}} \quad i = 1, 2 \quad (6.80)$$

avec Cte_1 et Cte_2 deux fonctions indépendantes de ξ . Comme $\check{\check{\mu}}$ est borné par μ_g et μ_l , la condition de raccord (6.79c) implique que $Cte_1 = Cte_2 = 0$ et donc que :

$$\check{\check{u}}^0(i)_{,3} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6.81)$$

On en déduit que $\check{\check{u}}^0(1)$ et $\check{\check{u}}^0(2)$ sont indépendants de ξ . La condition de raccord (6.79a), nous permet d'en conclure que les composantes tangentielles de la vitesse sont continues à l'ordre 0 :

$$\check{\check{u}}^0(1) = \check{\check{u}}^0(1)|_+ = \check{\check{u}}^0(1)|_- \quad (6.82a)$$

$$\check{\check{u}}^0(2) = \check{\check{u}}^0(2)|_+ = \check{\check{u}}^0(2)|_- \quad (6.82b)$$

L'ordre 0 de l'équation de continuité de la région intérieure (eq. (6.70a)) implique que $\check{\check{u}}^0(3)$ est indépendant de ξ . D'après la condition de raccord (6.79a), on en déduit que la composante normale de la vitesse est continue à l'ordre 0 :

$$\check{\check{u}}^0(3) = \check{\check{u}}^0(3)|_+ = \check{\check{u}}^0(3)|_- \quad (6.82c)$$

Conditions de saut sur les tenseurs

On a vu que $\check{\check{\mathbf{u}}}$ est indépendant de ξ (eq. (6.82)). Les relations (6.73b), (6.74b) et (6.75b) se réécrivent donc sous forme dimensionnelle :

$$\left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} \right)_{,3} + \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} \right)_{,3} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(1) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right)_{,3} \quad (6.83a)$$

$$\left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} \right)_{,3} + \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} \right)_{,3} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(2) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right)_{,3} \quad (6.83b)$$

$$-\check{\check{p}}_{,3}^0 + \sigma \overline{\kappa \chi_{g,3}} + 2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(3)_{,3} \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(3) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(3) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{33}^0 \right)_{,3} \quad (6.83c)$$

En intégrant les équations précédentes (6.83) sur l'épaisseur de la zone de transition, on trouve :

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right) \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(1) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right) \quad (6.84a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right) \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(2) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right) \quad (6.84b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(2 \left(\check{\mu} \check{u}^1(3)_{,3} \right) - \check{p}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(2 \left(\check{\mu} \check{u}^1(3)_{,3} \right) - \check{p}^0 \right) + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\rho} \check{u}^0(3) \check{u}^0(3) + \check{C}_{33}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\rho} \check{u}^0(3) \check{u}^0(3) + \check{C}_{33}^0 \right) \quad (6.84c)
\end{aligned}$$

Les conditions de raccord (6.79a) et (6.79d) permettent d'écrire les équations précédentes (6.84) :

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(1)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,1} + \kappa_1 (\bar{\mu} \bar{u}^0(1)) \right) \Big|_+ - \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(1)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,1} + \kappa_1 (\bar{\mu} \bar{u}^0(1)) \right) \Big|_- \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(1) d\xi + \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(1) \bar{u}^0(3) + C_{13}^0 \right) \Big|_+ - \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(1) \bar{u}^0(3) + C_{13}^0 \right) \Big|_- \quad (6.85a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(2)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,2} + \kappa_2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(2)) \right) \Big|_+ - \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(2)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,2} + \kappa_2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(2)) \right) \Big|_- \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(2) d\xi + \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(2) \bar{u}^0(3) + C_{23}^0 \right) \Big|_+ - \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(2) \bar{u}^0(3) + C_{23}^0 \right) \Big|_- \quad (6.85b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,3}) - \bar{p}^0 \right) \Big|_+ - \left(2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,3}) - \bar{p}^0 \right) \Big|_- + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0 \right) \Big|_+ - \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0 \right) \Big|_- \quad (6.85c)
\end{aligned}$$

Comme en $\xi_3 = 0$, on a $h_1 = h_2 = 1$ (voir annexe C), les termes de saut faisant intervenir la viscosité dans les relations précédentes s'interprètent à l'aide de l'équation (C.36) de l'annexe C comme le saut du tenseur des contraintes visqueuses contracté avec la normale. Pour travailler sur le terme lié aux forces capillaires $\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi$ de la dernière équation, on introduit la moyenne surfacique. Soit une grandeur $\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ continue y compris à l'interface, on définit la moyenne surfacique restreinte à l'interface, $\overline{\cdot}^\sigma$, sous forme adimensionnalisée dans le système de coordonnées associées à l'interface par

$$\overline{\phi}^\sigma(\xi_1^0, \xi_2^0) \hat{=} \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1 = \xi_1^0 - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi_1 = \xi_1^0 + \frac{\epsilon}{2}} \int_{\xi_2 = \xi_2^0 - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi_2 = \xi_2^0 + \frac{\epsilon}{2}} \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.86)$$

où e représente le rapport $\frac{r}{R_b}$ avec r la taille du filtre⁶. Pour les grandeurs uniquement définies sur l'interface, $\phi(\xi_1, \xi_2)$, on définit naturellement :

$$\overline{\phi}^\sigma(\xi_1^0, \xi_2^0) \hat{=} \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1 = \xi_1^0 - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi_1 = \xi_1^0 + \frac{\epsilon}{2}} \int_{\xi_2 = \xi_2^0 - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi_2 = \xi_2^0 + \frac{\epsilon}{2}} \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.87)$$

La moyenne surfacique restreinte à l'interface, $\overline{\cdot}^\sigma$, est la restriction à l'interface de la moyenne surfacique $\overline{\cdot}^s$ (définie par l'équation (5.53b)) :

$$\overline{\cdot}^\sigma = \overline{\cdot}^s \Big|_{\xi_3=0} \quad (6.88)$$

$\overline{\cdot}^\sigma$ n'est défini qu'à l'interface alors que $\overline{\cdot}^s$ est défini partout même si elle est nulle hors de la zone de transition ($|\xi_3| > \frac{\delta}{2}$). La dérivée suivant la direction normale de χ_g est un Dirac.

⁶Comme le paramètre ϵ , e est un petit paramètre adimensionnel mais on ne le fait pas tendre vers zéro car la taille du filtre r ne tend pas vers zéro et le rayon de courbure R_b ne tend pas vers l'infini. Etant donné la définition de e , e^2 représente la surface adimensionnalisée du support du noyau du filtre surfacique.

D'après le paragraphe C.9 de l'annexe C (eq. (C.49)), avec les coordonnées adimensionnalisées et une dilatation dans la direction normale ($\xi_3 = R_b \xi_3^+ = R_b \epsilon \xi$), on a

$$\overline{\kappa \chi_{g,3}}(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi^0) = \frac{\epsilon}{e^3} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \kappa(\xi_1, \xi_2) (-\delta_\sigma(\xi)) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi \quad (6.89a)$$

$$\approx -\frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \kappa(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \delta_\sigma(\xi) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.89b)$$

$$= -\overline{\kappa}^\sigma \frac{\delta}{r} \left(h\left(\xi^0 + \frac{r}{2\delta}\right) - h\left(\xi^0 - \frac{r}{2\delta}\right) \right) \quad (6.89c)$$

où h désigne la fonction de heaviside et avec par définition

$$\overline{\kappa}^\sigma \triangleq \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \kappa(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.90)$$

Le passage entre (6.89a) et (6.89b) suppose que les courbures varient faiblement (*i.e.* les courbures sont presque constantes sur la taille du filtre). Cette hypothèse formelle est la raison pour laquelle on a pu, à l'issue des tests *a priori*, faire l'hypothèse de modélisation $\tau_{superf}^m = 0$ (eq. (5.65e)). Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta}{r} \left(h\left(\xi + \frac{r}{2\delta}\right) - h\left(\xi - \frac{r}{2\delta}\right) \right) d\xi = 1 \quad (6.91)$$

l'équation (6.85c) s'écrit finalement sous forme dimensionnelle :

$$\begin{aligned} & (2(\overline{\mu} \overline{u}^0(3),3) - \overline{p}^0) \Big|_+ - (2(\overline{\mu} \overline{u}^0(3),3) - \overline{p}^0) \Big|_- - \sigma \overline{\kappa}^\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \overline{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + (\overline{\rho} \overline{u}^0(3) \overline{u}^0(3) + C_{33}^0) \Big|_+ - (\overline{\rho} \overline{u}^0(3) \overline{u}^0(3) + C_{33}^0) \Big|_- \end{aligned} \quad (6.92)$$

Cette relation est rassurante et intéressante car on retrouve la condition de saut sur le tenseur des contraintes de la SND avec la tension de surface corrigée par la grandeur en excès des corrélations entre la vitesse et la masse volumique. Cette grandeur en excès intervient comme une force superficielle à la manière des forces capillaires. Cependant, contrairement aux forces capillaires, la résultante des forces superficielles liées aux corrélations entre la vitesse et la masse volumique n'est pas nécessairement normale à l'interface.

6.4.7 Vitesse du repère associé à l'interface

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes placés dans le repère associé à l'interface. Dans ce repère, nous avons exprimé chacune des équations à l'ordre 0. Comme dans notre problème l'interface est mobile, ce repère l'est aussi et il nous faut connaître sa vitesse à l'ordre 0 en fonction du champ de vitesse monofluide. L'interface n'étant pas matérielle, l'expression de la vitesse normale suffit. D'après l'équation (6.65b), on a à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \overline{\chi}_g}{\partial t} + \overset{\sim}{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \chi_{k,3} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \chi_{k,3} - \overset{\sim}{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \chi_{k,3} = 0 \quad (6.93)$$

La dérivée par rapport au temps de l'équation précédente est une dérivée eulérienne : elle correspond à l'évolution du taux de présence en un point fixe de l'espace. Dans cette représentation, $\overline{\chi}_g$ est une fonction de l'espace, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, et du temps, $t : \overline{\chi}_g(\mathbf{x}, t)$. Il est intéressant de relier cette dérivée à la dérivée lagrangienne du taux de présence qui correspond à l'évolution de ce taux lorsque l'on suit l'interface discontinue équivalente. On note \mathbf{v}

la vitesse du repère $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ associé à l'interface (voir annexe C). En notant \mathbf{OM} le vecteur position, cette vitesse s'écrit par définition :

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \quad (6.94)$$

Elle permet de faire le lien entre la description lagrangienne et la description eulérienne :

$$\frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\chi}_g \quad (6.95)$$

L'adimensionnalisation de cette équation avec les choix présentés dans la section 6.4.1 fournit :

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\chi}_g \quad (6.96)$$

Après le changement de variable $\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon}$ (eq. (6.66)), on a à l'ordre 0 :

$$\frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} \quad (6.97)$$

En combinant les équations (6.93) et (6.97), on trouve :

$$v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} = \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} + \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}\chi_{k,3}} + \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{k,3}} - \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{k,3}} \quad (6.98)$$

En se rappelant que $\check{\mathbf{u}}^0$ est indépendant de ξ (eq. (6.82))⁷ et que χ_g est indépendant de ξ_1 et ξ_2 , on peut (en supposant que la courbure varie faiblement) décomposer chaque intégrale de volume en une intégrale de surface et une intégrale suivant la direction normale. On a par exemple :

$$\overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{g,3}} = \frac{\epsilon}{e^3} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi=\xi_0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi_0+\frac{r}{2\delta}} \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \chi_g}{\partial \xi} |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi \quad (6.99a)$$

$$\approx \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n} d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi_0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi_0+\frac{r}{2\delta}} \frac{\partial \chi_g}{\partial \xi} |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.99b)$$

$$= \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi_0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi_0+\frac{r}{2\delta}} (-\delta_\sigma(\xi)) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.99c)$$

$$= -\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \frac{\delta}{r} \left(h \left(\xi_0 + \frac{r}{2\delta} \right) - h \left(\xi_0 - \frac{r}{2\delta} \right) \right) \quad (6.99d)$$

D'après l'équation (6.91), on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{g,3}} d\xi = -\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \quad (6.99e)$$

En raisonnant de la même façon pour les autres termes faisant intervenir $\check{\mathbf{u}}^0$ et \mathbf{n} , ainsi qu'en utilisant l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} d\xi = \chi_g|_+ - \chi_g|_- = -1, \quad (6.100)$$

l'intégration suivant la direction normale de la relation (6.98) conduit à :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\check{\chi}_g}{Dt} d\xi + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma} + \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma} - \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma} \quad (6.101)$$

⁷Le fait que $\check{\mathbf{u}}^0$ est indépendant de ξ implique que $\check{\mathbf{u}}^0 = \overline{\mathbf{u}}^0$ car ces deux fonctions sont identiques au changement de variable $\xi = \frac{\xi_3}{\epsilon}$ près.

Pour parvenir au résultat précédent, on a utilisé le fait que la vitesse v_3^0 est indépendante de ξ_3 . En effet, en utilisant les définitions de \mathbf{v} (6.94) et de \mathbf{g}_3 (C.2) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_3}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{g}_3 + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{DOM}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{D(\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3)}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.102)$$

Comme lors d'un calcul, on ne connaît pas la normale, \mathbf{n} , mais seulement la normale moyenne, $\overline{\mathbf{n}}^\sigma$, on propose la modélisation suivante :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\overline{\chi}_g}{Dt} d\xi + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}}^\sigma + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma} - \overline{\mathbf{u}}^{0\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma} \quad (6.103)$$

Cette expression montre que pour estimer la vitesse du repère associé à l'interface on doit corriger la projection sur l'interface du champ de vitesse filtré en tenant compte des corrélations entre la vitesse et la normale ainsi que de la grandeur en excès associée à la variation temporelle du taux de présence. Dans les deux paragraphes suivants, on exprime cette grandeur en excès en fonction de l'évolution de la courbure.

Cas isotrope

On suppose que l'interface peut être approchée par une sphère (*i.e.* les deux rayons de courbures principaux sont supposés égaux). Dans ce cas, $\overline{\chi}_g$ est une fonction de la distance signée à la discontinuité équivalente, ξ_3 , et de sa courbure, κ , (qui dépend du temps) : $\overline{\chi}_g(\xi_3, \kappa(t))$. La dérivée par rapport au temps du taux de présence s'exprime alors en fonction de l'évolution temporelle de la courbure :

$$\frac{D\overline{\chi}_g}{Dt} = \frac{D\kappa}{Dt} \frac{\partial \overline{\chi}_g}{\partial \kappa} \quad (6.104)$$

La dérivée particulaire de la courbure est calculée dans l'annexe D, équation (D.30). L'expression du taux de présence en fonction de la courbure moyenne est calculée analytiquement au paragraphe 5.9 (dans le cas où l'interface peut être approximée par une sphère de façon satisfaisante). La dérivation de l'expression (5.83) par rapport au rayon de courbure $\kappa = \frac{2}{R_b}$ puis son intégration sur l'épaisseur du filtre, r , fournit à l'ordre 4 en r :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \overline{\chi}_g}{\partial \kappa} d\xi = \int_{-r}^{+r} \frac{\partial \alpha\left(\frac{r\kappa}{2}, \frac{\xi_3\kappa}{2}\right)}{\partial \kappa} d\xi_3 = -\frac{r^2}{10} + \frac{3r^4}{240}\kappa^2 + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.105)$$

On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\overline{\chi}_g}{Dt} d\xi = -\frac{r^2}{10} \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80}\kappa^2 \frac{D\kappa}{Dt} + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.106)$$

Finalement, en utilisant (6.106) et (D.30) dans l'équation (6.103), on a, en s'arrêtant à l'ordre 2 en r :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) \approx \underbrace{\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}}^\sigma}_{(i)} + \underbrace{\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma} - \overline{\mathbf{u}}^{0\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \overline{\mathbf{n}}^\sigma - 2\nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}}^\sigma))}_{(iii)} \quad (6.107)$$

Chacun des termes s'interprète comme suit :

- (i) est le produit des moyennes. Il s'agit de la contribution principale (d'ordre 0), celle qui correspond au déplacement moyen de l'interface.
- (ii) est le terme de Leonard de la corrélation sous-maille entre la vitesse et la normale. Il permet d'apporter une correction en ajoutant au terme moyen une estimation des corrélations entre la vitesse et la normale. On remarque que l'étape, où on se ramène à une interface discontinue équivalente, a transformé les moyennes volumiques en moyennes surfaciques. On a donc une sorte d'équivalent de l'hypothèse de similarité d'échelles pour une discontinuité.
- (iii) est une correction pour tenir compte de la variation de la courbure (Annexe D). On remarque que ce terme est défini à partir de la vitesse du repère que l'on cherche à exprimer. Par conséquent, l'expression finale que nous avons obtenue est implicite. Nous verrons dans les tests *a priori* que l'utilisation d'un simple point fixe permet d'évaluer ce terme de façon très satisfaisante. Il est important de noter que le tenseur de courbure (ou le gradient surfacique du vecteur normal $\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)$) doit *a priori* avoir ces deux valeurs propres (non nulles) égales. En effet, dans ce paragraphe, on modélise la surface par sa sphère osculatrice ce qui implique que les deux rayons de courbure principaux sont égaux au rayon de cette sphère ou encore (c'est équivalent) que le tenseur de courbure s'exprime comme le produit de la courbure de la sphère et du tenseur de projection \mathbf{P} défini à partir de la normale moyenne, $\bar{\mathbf{n}}^\sigma$ (voir équation (C.23) de l'annexe C). L'estimation numérique du tenseur de courbure montre que cette hypothèse est absolument fautive : les deux directions principales ne sont pas du tout équivalentes. C'est ce que l'on constate d'ailleurs simplement en observant la surface de la bulle. C'est la raison pour laquelle, on approche, dans le paragraphe suivant, la surface en distinguant les deux courbures principales (voir paragraphe 5.9.2).

Cas anisotrope

La surface est ici caractérisée par ses deux rayons de courbures principaux. Dans ce cas, $\bar{\chi}_g$ est une fonction de la distance signée à la discontinuité équivalente, ξ_3 , et des deux rayons de courbure, R_1 et R_2 , (qui dépendent du temps) : $\bar{\chi}_g(\xi_3, R_1(t), R_2(t))$. La dérivée par rapport au temps du taux de présence s'exprime alors en fonction de l'évolution temporelle des deux rayons de courbure :

$$\frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{DR_1}{Dt} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_1} + \frac{DR_2}{Dt} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_2} \quad (6.108)$$

En dérivant l'équation (5.89), et en faisant des développements limités en $r = 0$, on trouve (pour $\alpha = 1$ ou 2) :

$$\int_{-r}^r \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_\alpha} d\xi_3 = \frac{1}{10} \frac{r^2}{R_\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{R_\alpha^2} + \frac{r^2}{4} \kappa^2 \right) \right) + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.109)$$

En éliminant R_1 et R_2 pour tout exprimer en fonction de la courbure de Gauss, H , et de la courbure moyenne, κ (cf annexe C), on en déduit :

$$\int_{-r}^r \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} d\xi_3 = -\frac{r^2}{10} \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80} \kappa^2 \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80} \left[(\kappa^2 - 4H) \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{\kappa}{4} \frac{D}{Dt} (\kappa^2 - 4H) \right] + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.110)$$

La forme choisie de l'expression précédente permet de mettre en évidence que l'on dégénère correctement vers le cas isotrope. En effet, dans le cas isotrope, les deux rayons de courbures sont égaux, $\kappa_1 = \kappa_2$, et, la courbure de Gauss et la courbure moyenne sont alors liées par la relation :

$$\kappa^2 - 4H = 0 \quad (6.111)$$

Par conséquent, le terme entre crochet de l'équation (6.110) tend vers zéro dans le cas isotrope et on retrouve bien la relation (6.106). Le terme d'ordre 2 est lui inchangé par rapport au cas isotrope. On retrouve donc la même équation que précédemment :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) \approx \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + \overline{\bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \overline{\bar{\mathbf{u}}^{\sigma\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma} + \frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma - 2\nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.112)$$

Cependant, comme on n'a pas approché ici la surface par une simple sphère (les deux directions principales ne jouent pas le même rôle), il est cohérent de faire jouer tout son rôle (différent suivant la direction de la vitesse tangente) au tenseur de courbure. Pour clarifier notre propos, disons que l'on retrouve les mêmes équations, (6.107) et (6.112), mais que, pour être cohérent avec les approximations de la surface, on a, dans le cas isotrope,

$$\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma) = \frac{\kappa}{2} (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2) \quad (6.113)$$

et, dans le cas anisotrope :

$$\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma) = \kappa_1 \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \kappa_2 \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \quad (6.114)$$

En utilisant l'ordre 4 des équations (6.106) et (6.110) pour exprimer v_3^0 , l'hypothèse d'isotropie entraîne des différences beaucoup plus significatives, mais nous verrons qu'il est inutile d'aller jusqu'à cet ordre.

6.5 Système SGE discontinu fermé

Le système SGE discontinu correspond au système d'équations que vérifient les solutions $\tilde{\chi}_g$, \tilde{p} et $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème discontinu équivalent. Ce problème discontinu équivaut au problème extérieur des développements asymptotiques raccordés à un ordre donné. Comme notre étude se limite à l'ordre 0, on a par définition :

$$\tilde{\mathbf{u}} \hat{=} \bar{\mathbf{u}}^0 \quad (6.115a)$$

$$\tilde{p} \hat{=} \bar{p}^0 \quad (6.115b)$$

Pour la définition de $\tilde{\chi}_g$, on dispose d'un degré de liberté. Il correspond au problème classique du choix de la position de l'interface de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Cherchant à privilégier l'usage de grandeurs conservatives afin de simplifier l'expression des équations de bilan, on impose la conservation locale de la masse. Ceci revient à définir la nouvelle fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_g$ de telle sorte qu'il n'y ait pas de grandeur en excès sur cette fonction

$$\int_A (\tilde{\chi}_g - \bar{\chi}_g)^{ex} dA \hat{=} \int_V (\tilde{\chi}_g - \bar{\chi}_g) dV = 0 \quad (6.116)$$

où A désigne la surface de l'interface équivalente contenue dans V , un volume de contrôle contenant toute l'épaisseur de la zone de transition. L'aire A étant arbitrairement petite, la contrainte imposée à la discontinuité équivalente s'écrit simplement (voir paragraphe C.9 de l'annexe C pour l'écriture de l'élément de volume dans le système de coordonnées associées à l'interface) :

$$(\tilde{\chi}_g - \bar{\chi}_g)^{ex}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\chi}_g - \bar{\chi}_g)(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(1 - \xi\kappa_1)(1 - \xi\kappa_2) d\xi_3 = 0 \quad (6.117)$$

On définit logiquement, pour la discontinuité équivalente, sa normale, $\tilde{\mathbf{n}}$, et sa courbure, $\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\mathbf{n}} \delta_{\tilde{\sigma}} \hat{=} -\nabla \tilde{\chi}_g \quad (6.118a)$$

$$\tilde{\kappa} \hat{=} \nabla_s \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.118b)$$

Tant que la taille caractéristique du filtre reste inférieure au rayon de courbure local (*i.e.* faible variation de la courbure sur la taille du filtre), on suppose que notre choix pour la localisation de la discontinuité équivalente nous permet de confondre les grandeurs $\overline{\cdot}^\sigma$ et $\tilde{\cdot}$. En particulier, on considère que :

$$\tilde{\mathbf{n}} \approx \overline{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.119a)$$

$$\tilde{\kappa} \approx \overline{\kappa}^\sigma \quad (6.119b)$$

On peut comprendre intuitivement cette approximation en se rappelant que $\tilde{\cdot}$ est la limite asymptotique de $\overline{\cdot}$ quand l'épaisseur de la zone de transition, δ tend vers zéro et que $\overline{\cdot}^\sigma$ représente la moyenne surfacique. En effet, faire tendre l'épaisseur de la zone de transition vers zéro en maintenant la taille du filtre constant revient moralement à transformer, à l'interface, le filtre volumique $\overline{\cdot}$ en filtre surfacique $\overline{\cdot}^\sigma$.

6.5.1 Equation de transport de l'interface filtrée discontinue

Afin de pouvoir réaliser des simulations de SGE discontinue, il faut établir une équation de transport pour $\tilde{\chi}_g$ qui ne fait intervenir que les grandeurs filtrées du problème discontinu. La vitesse de la discontinuité équivalente, \mathbf{v}_σ , est définie par l'équation (6.63a) que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_\sigma \cdot \nabla \tilde{\chi}_g = 0 \quad (6.120)$$

Comme seule la vitesse normale est utile, on suppose

$$\mathbf{v}_\sigma = v_\sigma \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.121)$$

où

$$\nabla \tilde{\chi}_g = -\tilde{\mathbf{n}} \delta_\sigma \quad (6.122)$$

La contrainte que nous avons choisie pour la position de la discontinuité équivalente (6.117) implique que cette dernière est presque confondue avec la position originelle de la discontinuité⁸. Les normales filtrées sont elles aussi presque égales : $\overline{\mathbf{n}}^\sigma \approx \tilde{\mathbf{n}}$. Comme par définition, la vitesse \mathbf{v}_σ correspond à la vitesse du repère associé à l'interface, à l'ordre 0, on a (*cf* eq. (6.112))

$$v_\sigma \hat{=} v_\sigma^0 = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \cdot \overline{\tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\tilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (6.123a)$$

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}}_g \quad (6.123b)$$

où r est la taille du filtre. Finalement, l'équation de transport de l'interface filtrée discontinue s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \cdot \overline{\tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}}_g \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}}_g \right) : \nabla_s(\tilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (6.124)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, cette expression est implicite dans la mesure où on ne connaît la variation temporelle de la fonction indicatrice de phase qu'en fonction d'elle même. Nous verrons dans les tests *a priori* de ce modèle qu'un simple point fixe permet de très bien estimer l'évolution de la fonction indicatrice de phase. Les coefficients 1 (devant les corrélations entre la vitesse et la normale), $\frac{r^2}{10}$ (devant la variation temporelle de la courbure)

⁸Pour que les positions de la discontinuité équivalente et de la discontinuité originelle soient presque confondues, il faut bien sûr que les courbures varient très peu sur la taille du filtre. Nous nous plaçons dans ce cas.

dépendent de la forme supposée du filtre ainsi que des hypothèses et approximations que nous avons faites. Ils nécessitent d'être réévalués dans le cas d'un filtre implicite et constituent des paramètres du modèle que nous proposons. L'intérêt de l'expression (6.123) est de faire apparaître un terme de corrélation entre la vitesse et la normale, et deux autres proportionnels à une fonction puissance de la taille du filtre r . Par conséquent, ces deux corrections tendent bien naturellement vers zéro lorsque la taille du filtre tend vers 0. Enfin, on a tout fait pour que ces termes soient sans effet sur le bilan de masse : une bulle d'un volume donné conservera ce volume tant qu'elle ne subit pas de phénomène de rupture ou de coalescence. Les modèles présentés agissent sur la forme de la bulle. Sa surface frottante est ainsi modifiée : ces modèles agissent donc indirectement sur la vitesse macroscopique de la bulle.

6.5.2 Equation de continuité

Nous avons vu qu'à l'ordre 0 les vitesses sont continues à la traversée de l'interface. Par conséquent, l'équation de continuité du problème discontinu équivalent s'écrit simplement :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.125)$$

6.5.3 Equation de bilan de quantité de mouvement

Grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous avons précisé les relations de saut que vérifient les solutions du problème extérieur. D'après les définitions (6.115), les relations de saut (eq. (6.85)) s'écrivent pour le problème discontinu équivalent à l'ordre choisi (ici l'ordre 0) :

$$\sum_k \left(\tilde{p}_k \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathcal{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla \tilde{\chi}_k = - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + \int_{-r}^{+r} \frac{\partial \left(\overline{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}} - \overline{\tilde{\rho}} \tilde{\mathbf{u}} \right)}{\partial t} d\xi_3 \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (6.126)$$

D'après l'équation (6.63c), il reste à préciser $\sum_k \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t}$. Ce terme s'exprime grâce à la continuité des vitesses et au transport de la discontinuité

$$\begin{aligned} \sum_k \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} &= (\rho_g - \rho_l) \tilde{\mathbf{u}} \frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \\ &= -[\rho] \tilde{\mathbf{u}} \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (6.127) \end{aligned}$$

où $[\rho]$ désigne le saut de masse volumique $\rho_l - \rho_g$. Dans chacune des deux relations de saut précédentes, on retrouve les relations de la SND corrigées par des modèles afin de tenir compte des interactions sous-maille entre interfaces et turbulence. Le saut du tenseur des contraintes n'est plus simplement égal à la tension de surface mais à cette dernière à laquelle on ajoute la grandeur en excès associée aux corrélations entre la vitesse et la variation temporelle de la masse volumique. Le saut de quantité de mouvement se déduit du transport de l'interface qui s'exprime, outre le terme classique de la SND, en fonction des corrélations de la vitesse et de la normale ainsi que de l'évolution temporelle de la courbure.

6.5.4 Système complet

En résumé, nous avons établi le système d'équations suivant

– équation de continuité :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.128a)$$

– équation de transport de la discontinuité équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = & \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.128b)$$

– équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = & -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathcal{L}}) \\ & - [\rho] \tilde{\mathbf{u}} \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \\ & - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}})}{\partial t} d\xi_3 \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.128c)$$

Lorsque la taille du filtre tend vers zéro, $r \rightarrow 0$, ces équations tendent naturellement vers les équations de la SND. En effet, les termes que l'on ne retrouve pas en SND sont soit pondérés par r^2 , soit des corrélations qui tendent vers zéro avec la taille du filtre.

Le système ci-dessus a été établi à partir d'un système continu fermé. Cependant, il est aisé de remplacer chacune des modélisations par le terme sous-maille correspondant. De cette façon, on obtient un système discontinu pour la SGE diphasique non fermé et on peut introduire d'autres modélisations que celles choisies dans ce mémoire. Autrement dit, bien que la méthode des développements asymptotiques raccordés nécessite de partir d'un système fermé, on peut espérer que le résultat que nous avons obtenu reste valable avec d'autres modèles. Ainsi, même si le travail de modélisation réalisé au cours de cette thèse constitue un tout, les résultats peuvent certainement s'utiliser indépendamment.

6.6 Tests *a priori*

L'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis d'établir un système discontinu pour la SGE des écoulements diphasiques. En particulier, nous avons vu que certains termes sous-maille spécifiques apparaissent finalement comme des forces surfaciques à la manière des forces capillaires. Cependant, il n'y a pas de nouveaux éléments de modélisation par rapport au système continu dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et l'hypothèse d'incompressibilité. Or, dans le chapitre précédent, nous avons déjà discuté à partir de tests *a priori* de la validité des modèles que nous avons développés. Par conséquent, il est uniquement nécessaire d'étudier l'équation de transport de la discontinuité équivalente dans laquelle nous avons introduit de nouveaux modèles afin de tenir compte notamment de la courbure de l'interface. Les nouvelles fermetures que nous avons introduites

tiennent compte de la possible anisotropie de la surface, *i.e.* du fait que les courbures des directions principales ne sont pas nécessairement égales (voir paragraphe 5.9.2). Il est donc préférable de les tester sur des écoulements 3D. L'ensemble des tests *a priori* présentés dans ce paragraphe ont été réalisés à partir des champs issus de la SND de l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille (voir paragraphe 4.5).

6.6.1 Difficulté générale de tester les résultats de DAR

Dans le chapitre précédent, lorsque nous avons testé nos modèles de la SGE des écoulements diphasiques avec une vision continue des interfaces, nous avons fait l'hypothèse forte que l'on sait construire, à partir des champs issus de la SND, les champs que l'on aurait obtenus en réalisant une SGE. Formellement, cela signifie que l'on confond le filtre explicite dont on se sert analytiquement pour développer des modèles et le filtre implicite qui dépend du maillage mais aussi de la méthode numérique. Dans ce mémoire, nous avons choisi comme filtre explicite un filtre boîte et nous avons donc négligé le fait que le filtre dépend aussi de la méthode numérique. Dans le cas des résultats des DAR, la situation est encore plus complexe car on ne sait pas construire la solution discontinue équivalente à partir de résultats de SND. Considérons par exemple le champ de vitesse \mathbf{u} . Il est facile de construire le champ de vitesse de la SGE avec une vision continue des interfaces $\bar{\mathbf{u}}$, il suffit de faire le produit de convolution entre le noyau du filtre et le champ de vitesse : $\bar{\mathbf{u}} = G \star \mathbf{u}$. En revanche, dans la zone interfaciale, il est délicat d'estimer le champ de vitesse de la SGE avec une vision discontinue des interfaces $\tilde{\mathbf{u}}$, car il n'est pas issu d'une opération simple : il correspond à la limite asymptotique de $\bar{\mathbf{u}}$ quand l'épaisseur de la zone de transition interfaciale tend vers zéro.

6.6.2 Méthodologie dans le cas de l'équation de transport de l'interface

Nous avons établi une équation de transport de l'indicatrice de phase (eq. (6.128b)) dans le cadre de la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces. Cette dernière fournit, à partir du champ de vitesse dans les phases, la vitesse de la discontinuité équivalente (eq. (6.123)). La difficulté consiste à déterminer quelle est la vitesse de référence de la discontinuité équivalente à laquelle on doit comparer la vitesse que retournent nos modèles.

Pour déterminer la vitesse d'interface de référence, nous avons envisagé une procédure rigoureuse. Malheureusement, elle s'avère trop difficile à mettre en oeuvre. Par conséquent, nous avons choisi de la décrire rapidement puis de présenter la façon dont nous avons finalement estimé cette vitesse de référence.

La vitesse que l'on cherche correspond au déplacement élémentaire de l'interface filtrée discontinue. La meilleure façon de faire consiste donc à construire, à chaque pas de temps, la discontinuité équivalente à partir de l'interface de la SND puis, à mesurer le déplacement de cette discontinuité équivalente suivant la direction normale. Cet algorithme d'évaluation est résumé par la figure 6.5. On commence par définir à chaque instant l'interface filtrée discontinue à partir de la description géométrique fournie par la SND. Puis, on évalue la vitesse de déplacement normale à partir de deux positions successives de la discontinuité équivalente.

Pour mettre en place la méthode précédente, il est nécessaire de sauvegarder la position de l'interface très régulièrement ce qui peut poser des problèmes de stockage des données. De plus, il faut implémenter une procédure de construction de la discontinuité équivalente

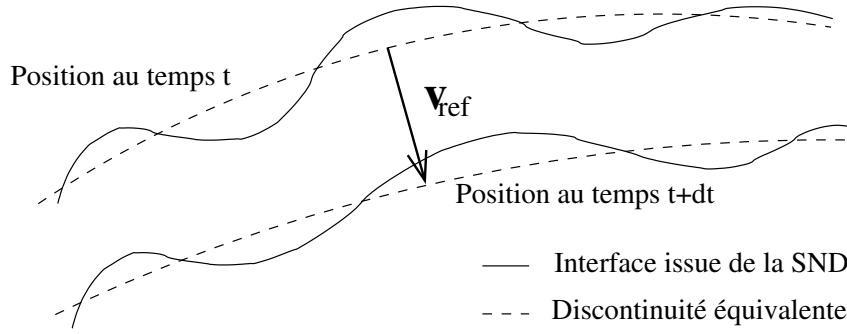


FIG. 6.5 – Détermination de la vitesse de la discontinuité équivalente pour les tests *a priori* sur l'équation de transport de l'interface dans le cadre de la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces.

ce qui risque d'être délicat car on désire tenir compte de la courbure. Par conséquent, on a décidé d'utiliser une procédure plus simple. On considère que la géométrie de l'interface filtrée discontinue est bien approchée par la normale issue de la SND filtrée surfaciquement, $\bar{\mathbf{n}}^\sigma$. Enfin, on suppose qu'elle est déplacée par le champ de vitesse de la SND, \mathbf{u} . On obtient ainsi la vitesse de référence v_{ref} :

$$v_{ref} = \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.129)$$

On désire la comparer à $v_{\tilde{\sigma}}$ déterminé par l'équation (6.123). Pour estimer $v_{\tilde{\sigma}}$, il faut normalement disposer de $\tilde{\mathbf{u}}$ sur l'interface, on suppose que cette vitesse est très proche de la moyenne surfacique de la vitesse de la SND, $\bar{\mathbf{u}}^\sigma$. La vitesse qu'estime notre modèle est donc évaluée par l'expression

$$v_{\tilde{\sigma}} = \bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + c_0 (\overline{\bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}^{\sigma\sigma}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}) + c_1 \frac{r^2}{10} (\Delta_s (\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s (\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s (\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.130)$$

où les coefficients c_0 et c_1 sont des paramètres du modèle. Comme nous l'avons déjà mentionné, la vitesse de la discontinuité, $v_{\tilde{\sigma}}$, est définie implicitement (son expression est fonction d'elle-même). On utilise un point fixe avec une seule itération pour l'évaluer. En résumé, dans ces tests *a priori* on étudie la potentialité de notre modèle τ_{disc}^m

$$\tau_{disc}^m = c_0 (\overline{\bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}^{\sigma\sigma}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}) + c_1 \frac{r^2}{10} (\Delta_s (\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s (\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s (\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.131)$$

à estimer le terme sous-maille τ_{disc} :

$$\tau_{disc} = \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma - \bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.132)$$

Ce terme sous-maille correspond à reconstruire, suivant la direction normale, \mathbf{u} à partir de $\bar{\mathbf{u}}^\sigma$. Il est différent de ceux que nous avons rencontrés lors de l'établissement des équations de la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces car il tient compte de leur raidissement. La modélisation issue de l'évolution de la courbure (il s'agit des termes qui font intervenir des dérivées surfaciques) et qui s'ajoute à la modélisation de type similarité d'échelles (elle-même modifiée du fait du raidissement) est aussi là pour tenir compte de l'étape de construction d'une discontinuité équivalente. Notre analyse des tests *a priori* s'oriente donc vers une vérification de l'intérêt de ces termes supplémentaires. Dans le chapitre précédent, on a vu que le laplacien d'un champ filtré permet d'évaluer la partie non résolue de ce champ (eq. (5.24)). Les opérateurs surfaciques ont le même rôle dans ce cas plus complexe.

6.6.3 Implémentation des opérateurs surfaciques

Pour réaliser les tests *a priori*, on a besoin de définir deux types d'opérateurs surfaciques : l'opérateur de moyenne et les opérateurs de dérivation.

Moyenne surfacique

Comme dans le cas volumique, on choisit un filtre boîte (voir paragraphe 5.2.2). Cependant, puisque le maillage de l'interface n'est pas structuré, il est difficile de définir un filtre boîte de taille quelconque. Pour faire varier la taille du filtre, on se contente de l'appliquer récursivement. On n'a alors plus un filtre boîte car des coefficients de pondération apparaissent. En 2D, l'interface est une courbe et, pour le filtre appliqué respectivement une, deux et trois fois, on trouve

$$\bar{\phi}_i = \frac{\phi_{i-1} + \phi_i + \phi_{i+1}}{3} \quad (6.133a)$$

$$\bar{\bar{\phi}}_i = \frac{\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{3} \quad (6.133b)$$

$$\bar{\bar{\bar{\phi}}}_i = \frac{\bar{\bar{\phi}}_{i-1} + \bar{\bar{\phi}}_i + \bar{\bar{\phi}}_{i+1}}{3} \quad (6.133c)$$

où les indices i désigne le numéro du marqueur. En convenant que $\bar{\phi}^0 = \phi$, on a de façon générale :

$$\bar{\phi}_i^n = \frac{\bar{\phi}_{i-1}^{n-1} + \bar{\phi}_i^{n-1} + \bar{\phi}_{i+1}^{n-1}}{3} \quad \text{pour tout entier } n \text{ plus grand que } 1 \quad (6.134)$$

On a omis l'exposant σ pour alléger les notations. Ces définitions s'étendent immédiatement au 3D en remplaçant les marqueurs de droite et de gauche par tous les voisins immédiats.

Différenciation surfacique

Le modèle que nous avons développé nécessite le calcul des opérateurs gradient et laplacien surfaciques (voir eq. (6.131)). En particulier, il faut évaluer le tenseur de courbure et non simplement sa trace (la courbure moyenne) comme pour les forces de tension superficielle. Ceci signifie que l'on cherche à identifier les directions et courbures principales d'un maillage de surface. Puisqu'on suppose que la normale discrète est constante par élément, il est délicat de donner un sens à sa dérivée seconde. Dans l'annexe E, on explique la façon dont on a procédé.

6.6.4 Détermination des paramètres du modèle

Du fait de sa définition implicite, la vitesse de transport de l'interface $v_{\bar{\sigma}}$ dépend de façon fortement non linéaire des paramètres du modèle c_0 et c_1 . Afin de déterminer ces paramètres, on a utilisé une technique de minimisation. A l'aide de l'algorithme du simplex (voir annexe F), on a minimisé l'erreur commise sur un intervalle de temps représentatif. A chaque instant, on définit l'erreur, E , comme la somme des carrés de la différence entre la contribution réelle du terme sous-maille, τ_{disc} , et sa modélisation, τ_{disc}^m , en chaque point du maillage surfacique. On normalise cette erreur par la somme des carrés du terme sous-maille en chaque marqueur de l'interface

$$E = \frac{\sum_{k=1}^N (\tau_{disc}(\mathbf{x}_k) - \tau_{disc}^m(\mathbf{x}_k))^2}{\sum_{k=1}^N (\tau_{disc}(\mathbf{x}_k))^2} \quad (6.135)$$

où N désigne ici le nombre de marqueur lagrangien et \mathbf{x}_k la position du marqueur k . Pour chaque couple de paramètres $(c_0 ; c_1)$, on fait la moyenne de l'erreur, E , sur l'intervalle de

temps choisi. C'est cette moyenne que l'on minimise. Lorsqu'on applique trois fois le filtre itératif (défini paragraphe 6.6.3), on obtient une moyenne de huit pourcents d'erreur avec le couple de paramètre (1,5 ; 0,36). Nous avons aussi effectué la minimisation en appliquant une seule fois le filtre, six fois et douze fois. Sur le tableau 6.1, on constate que jusqu'à un filtre douze fois plus grand, l'erreur reste à peu près constante et toujours inférieure à la valeur de dix pourcents ce qui est très satisfaisant. On remarque également (tab. 6.1) que le paramètre devant le terme en similarité d'échelles de notre modèle reste lui aussi à peu près constant. On peut donc recommander de choisir $c_0 = 1,5$ quelle que soit la sous-résolution du calcul (à condition toutefois d'être dans les hypothèses du concept ISS que nous avons déjà précisées). Cependant, les choses sont plus délicates avec le paramètre c_1 . En effet, ce paramètre varie fortement en fonction de la sous-résolution et tout se passe comme s'il manquait une dépendance à notre modèle⁹. On propose de déterminer cette dépendance (tab. 6.1). Si on note Δ la longueur caractéristique qui sépare deux marqueurs lagrangiens du maillage de la SND et nb_{it} le nombre d'itérations du filtre boîte, on a

$$r = nb_{it}\Delta \quad (6.136)$$

où on rappelle que r désigne la largeur du support du noyau de convolution du filtre. Or, toujours d'après le tableau 6.1, on remarque que :

$$c_0 \approx \frac{1}{nb_{it}} \quad (6.137)$$

Puisque la SND est telle que $\Delta \approx \frac{\eta}{2}$ où η est l'échelle de Kolmogorov, d'après les équations (6.136) et (6.137), on a :

$$c_0 \approx \frac{\eta}{r} \quad (6.138)$$

Finalement, on propose le modèle suivant :

$$\tau_{disc}^m = \frac{3}{2} (\overline{\mathbf{u}^\sigma \cdot \mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\mathbf{u}^{\sigma\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}}) + \eta \frac{r}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}^\sigma})) \quad (6.139)$$

Sous cette forme finale, notre modèle n'a plus de paramètre, il est directement applicable. Par rapport à sa formulation précédente, on remarque que la partie qui tient compte de la variation de la courbure ne décroît plus comme la taille du maillage de la SGE diphasique (r) au carré mais simplement comme r . Par conséquent, même pour des maillages relativement fins il semble important de tenir compte de ce terme.

6.6.5 Bien-fondé du modèle

On étudie le modèle sous sa forme finale donnée par l'équation (6.139) lorsqu'on applique trois fois le filtre boîte récursif. La figure 6.6 montre l'évolution temporelle de l'erreur commise lorsqu'on modélise τ_{disc} :

- uniquement par l'hypothèse de similarité d'échelles surfacique $\frac{3}{2} (\overline{\mathbf{u}^\sigma \cdot \mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\mathbf{u}^{\sigma\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}})$,
- seulement en tenant compte de la variation de la courbure $\eta \frac{r}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}^\sigma}))$ et
- par le modèle complet τ_{disc}^m .

⁹En fait, il n'est pas étonnant que notre modèle n'ait pas tout à fait les bonnes dépendances, car nous l'avons développé en faisant l'hypothèse d'un filtre bien particulier que nous n'avons pas utilisé par la suite. En effet, au moment de développer le modèle, il était beaucoup plus commode de supposer que le support du filtre était sphérique mais pour les tests *a priori*, il est beaucoup plus simple d'implémenter un filtre boîte récursif. De plus, on a supposé que le rayon de courbure était beaucoup plus grand que la taille du filtre ce qui est de moins en moins vrai quand on augmente la sous-résolution.

Nombre d'itérations du filtre boîte	c_0	c_1	$\frac{1}{nb_{it}}$	Erreur moyenne (en pourcent)
1	1,4	0,9	1	7
3	1,5	0,36	0,33	8
6	1,55	0,19	0,17	8,4
12	1,6	0,1	0,08	9,3

TAB. 6.1 – Pourcentage d'erreur commise et valeur des paramètres du maillage suivant la taille du filtre (nb_{it} désigne le nombre d'itérations du filtre boîte)

Avec une seule des deux contributions, on modélise environ 50 pourcents du terme sous-maille. Lorsqu'on considère le modèle complet, on modélise plus de 90 pourcents du terme sous-maille. Les deux termes semblent donc essentiels pour modéliser le transport de la discontinuité équivalente. De plus, on constate qu'ils ont un comportement différent : ils paraissent complémentaires. En effet, lorsqu'on se trouve à un maximum local de l'erreur que l'on commet avec un seul des deux termes, on est aussi à un minimum local de l'erreur commise avec uniquement l'autre terme. De cette façon, l'erreur faite avec le modèle complet est presque constante alors que l'erreur dans le cas d'un des deux modèles partiels varie fortement. A $t = 200\Delta t$ par exemple, le terme qui tient compte de la variation de courbure est beaucoup plus performant que le terme qui repose sur l'hypothèse de similarité d'échelles. A $t = 500\Delta t$, c'est l'inverse. Il peut paraître étonnant que le terme qui tient compte de la variation de courbure modélise jusqu'à plus de soixante pourcents du terme sous-maille. En réalité, ce terme fait intervenir un laplacien de la vitesse. Or, nous avons vu (paragraphe 5.3.2) que le laplacien de la vitesse est une bonne approximation des fluctuations du champ de vitesse (eq. (5.24)). Par conséquent, il n'est pas très surprenant que ce genre de terme joue un rôle prépondérant pour modéliser le transport de la discontinuité équivalente.

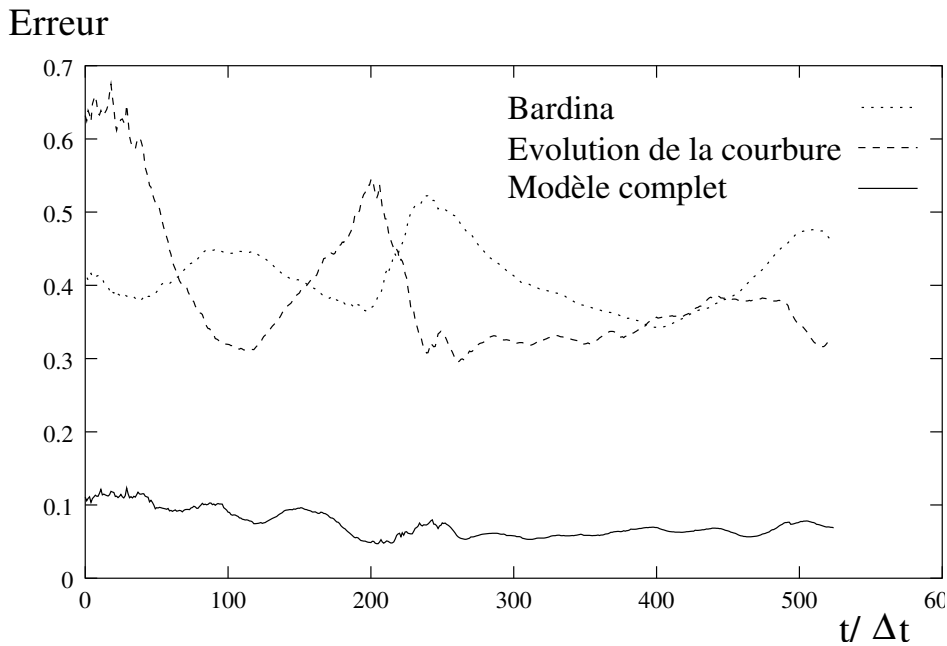
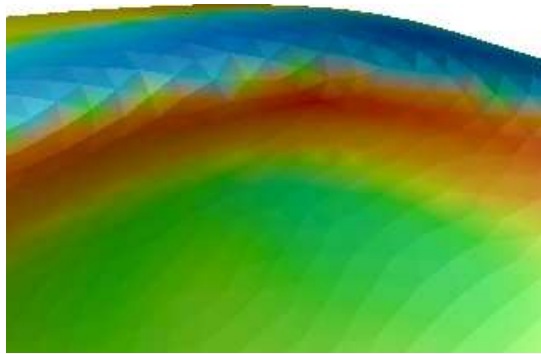
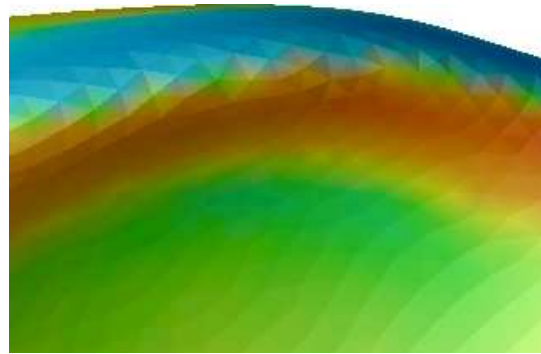


FIG. 6.6 – Evolution temporelle de l'erreur commise sur le transport de l'interface. Dans le cas d'un modèle : avec seulement les corrélations entre la vitesse et la normale, avec seulement l'évolution temporelle de la courbure, en combinant les deux modélisations.

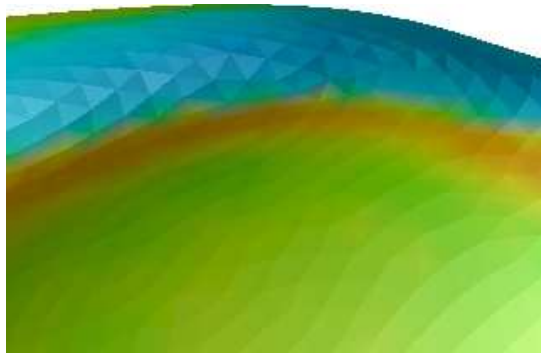
Afin de mieux comprendre le rôle joué par chacun des deux termes de notre modèle, nous les avons représentés sur la surface de la bulle à différents instants : $t = 0$ (fig. 6.7), $t = 200\Delta t$ (fig. 6.8) et $t = 500\Delta t$ (fig. 6.9). Nous avons choisi ces trois instants car ils correspondent aux trois façons différentes dont nos termes se complètent. Pour $t = 500\Delta t$ (fig. 6.9), les deux termes ont le même motif mais pas la même amplitude. Pour $t = 0$ (fig. 6.7), les deux termes ont presque le même motif mais l'endroit où ils changent de signe est décalé. Pour $t = 200\Delta t$ (fig. 6.8), les deux termes n'ont pas le même motif. Dans tous les cas, seule la somme des deux termes de nos modèles permet de bien estimer le motif et l'amplitude du terme sous-maille. Ainsi, on confirme la nécessité et l'intérêt de ces deux contributions. De plus, la modélisation complète est remarquable car dans chaque cas (fig. 6.7 à fig. 6.9), on ne distingue que difficilement la différence entre la contribution réelle (fig. (a)) et le modèle (fig. (b)). Ce bon résultat est d'ailleurs confirmé par la représentation de l'erreur (fig. (e)) dont l'amplitude est très inférieure à celle du terme sous-maille (elle en représente au plus 10 pourcents). Pour finir cette étude, on a tracé les corrélations de chacun des termes et du modèle complet avec la contribution réelle du terme sous-maille pour chacun des instants précédents (fig. 6.10 à fig. 6.12). Sans surprise, le modèle complet (fig. (a)) est excellent. Il est un peu moins bon au début du calcul (fig. 6.10) du fait de la présence de très forte courbure qui nous place à la limite de ses conditions de validité. Les contributions isolées sont beaucoup moins bien corrélées (fig. (b) et fig. (c)) et on note à nouveau une différence de comportement : la dispersion se fait par valeur inférieure pour l'hypothèse de similarité d'échelles et par valeur supérieure pour le terme qui tient compte de l'évolution de la courbure.



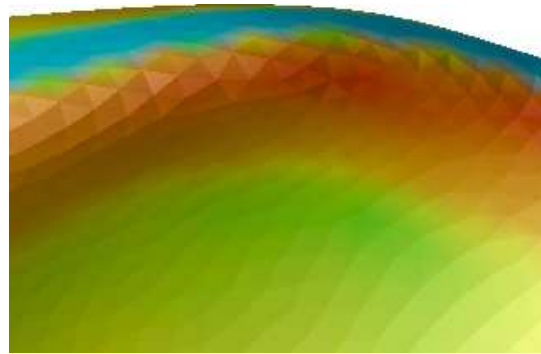
(a) Contribution réelle



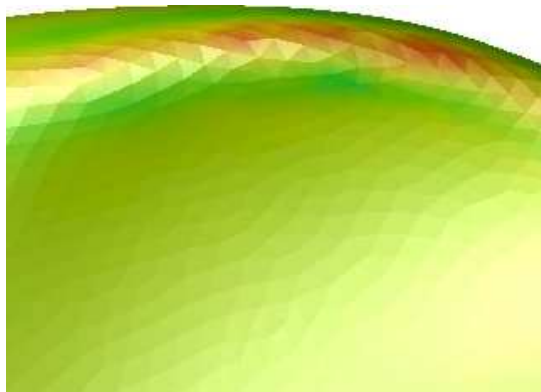
(b) Modèle complet



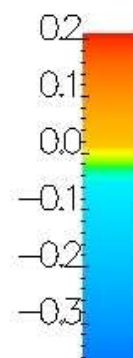
(c) Similarité d'échelles



(d) Evolution de la courbure



(e) Erreur



(f) Echelle de couleur (m/s)

FIG. 6.7 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $t = 0$

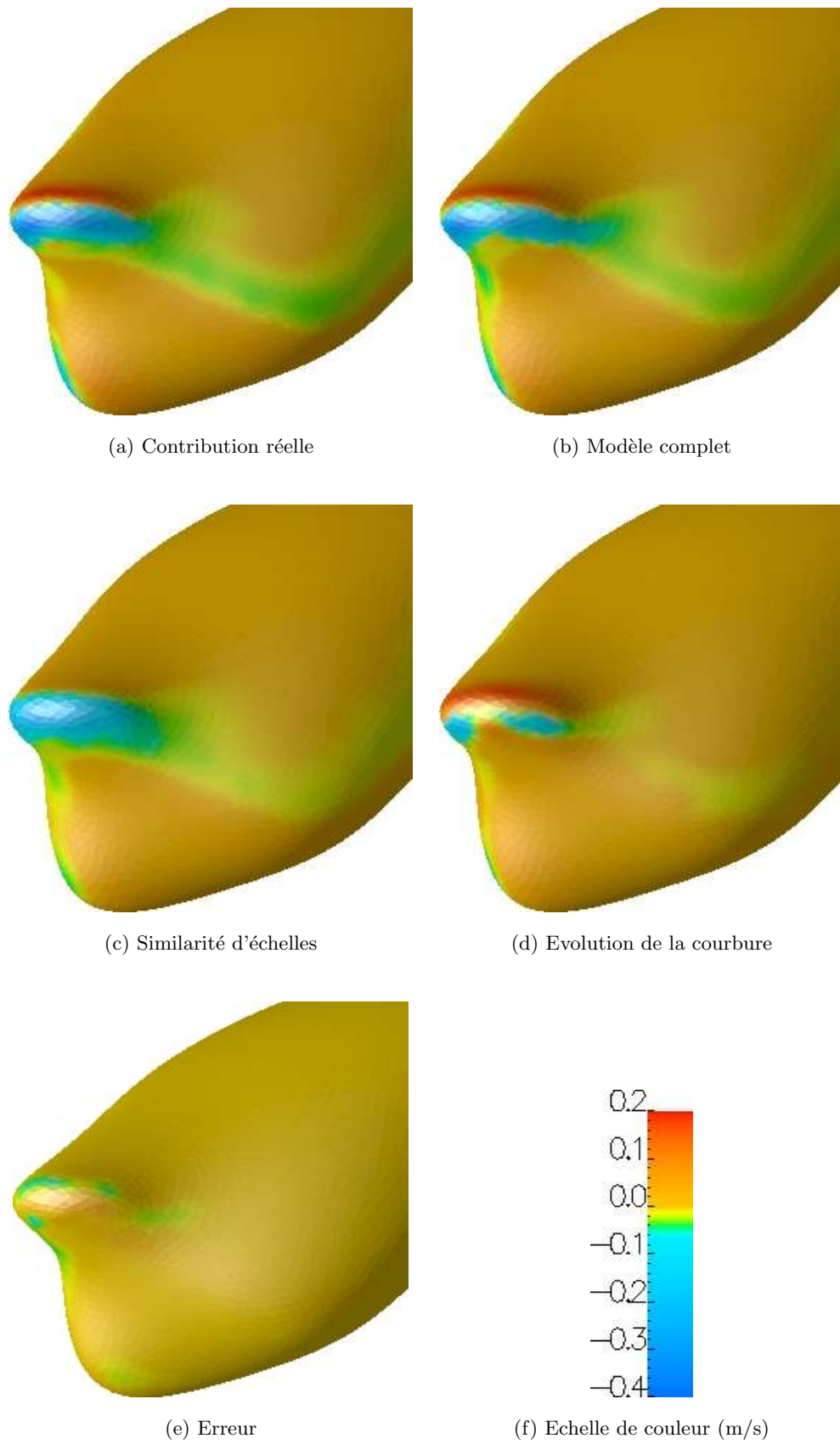
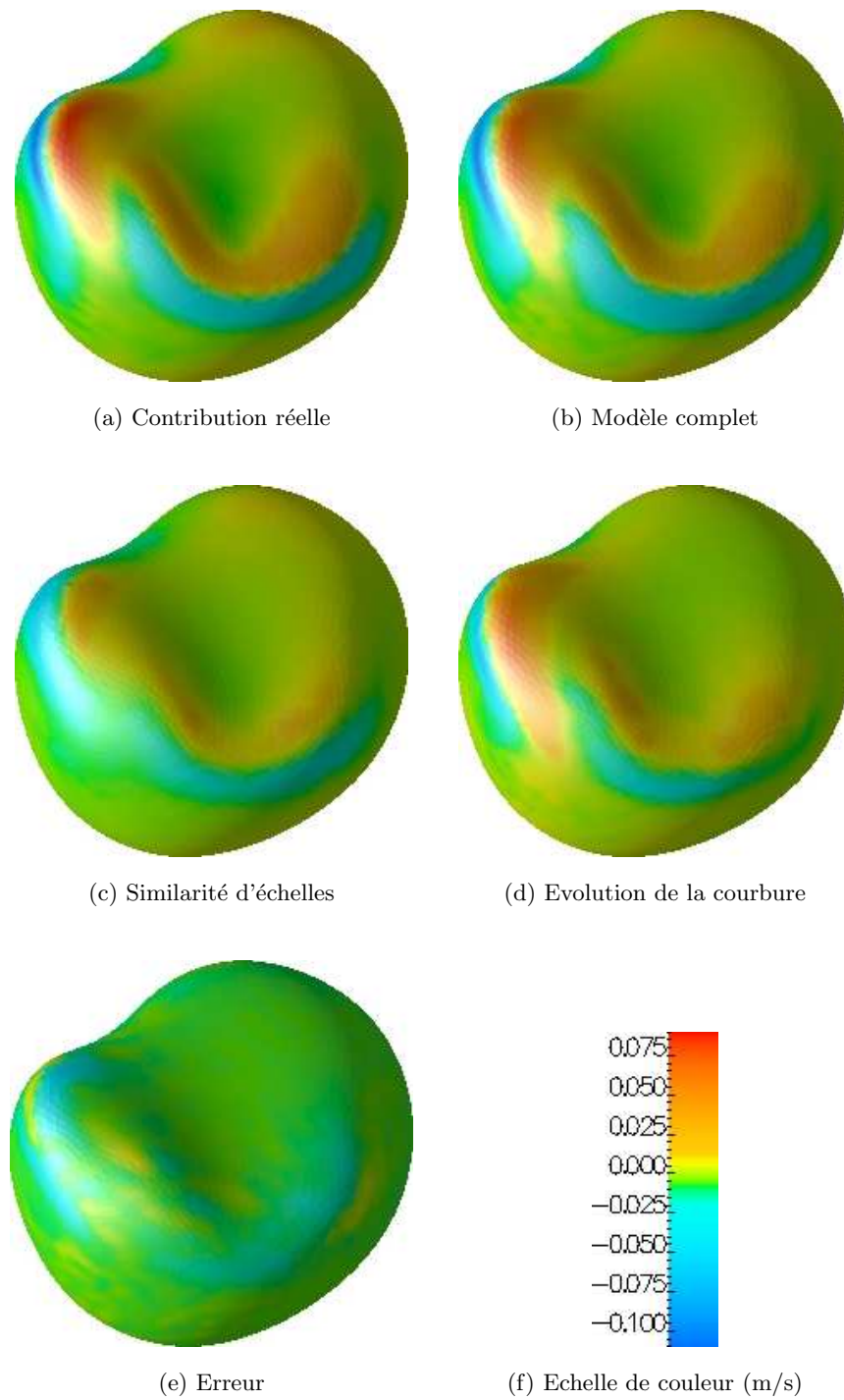


FIG. 6.8 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 200$

FIG. 6.9 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 500$

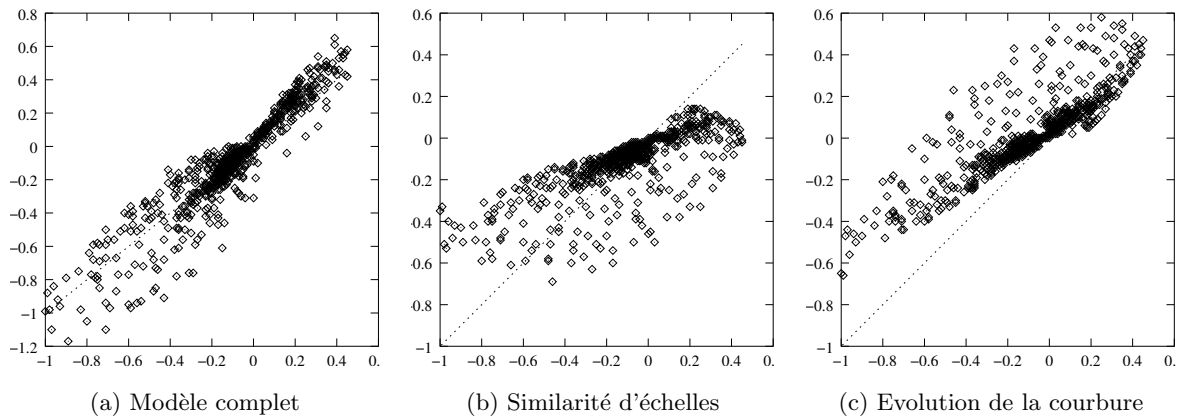


FIG. 6.10 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $t = 0$

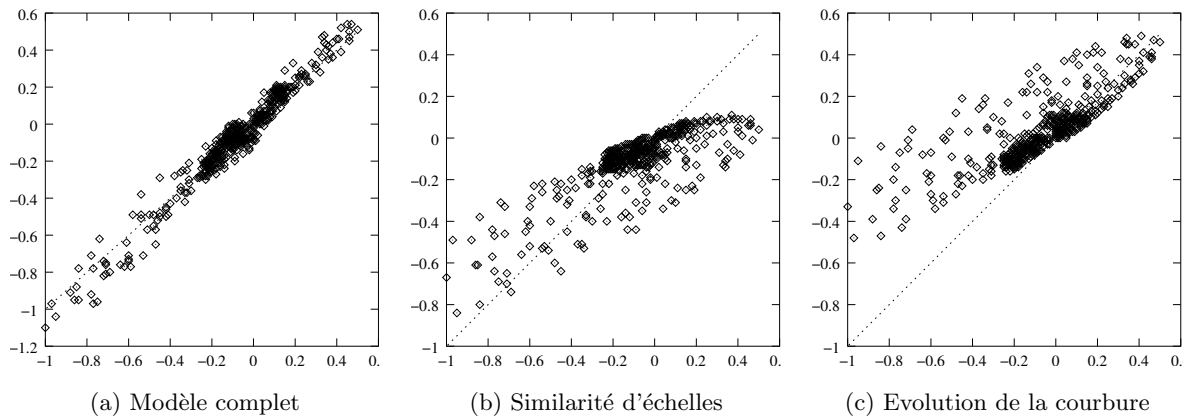


FIG. 6.11 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 200$

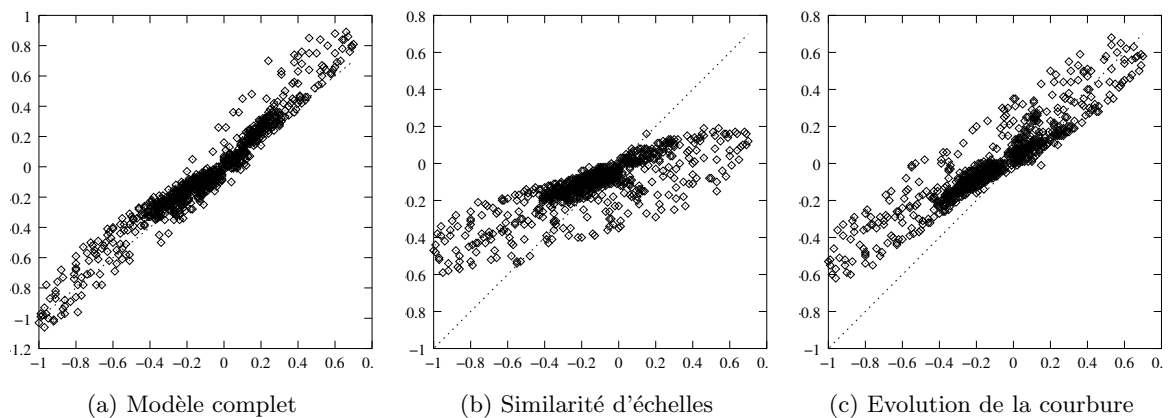


FIG. 6.12 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 500$

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté et illustré en détail sur des exemples précis deux méthodes (l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des DAR) qui permettent de passer d'une description continue à une vision discontinue des interfaces. Ces méthodes sont principalement utilisées en SND afin de trouver la limite asymptotique discontinue d'une zone volumique de transition. Grâce aux DAR appliqués aux équations des interfaces diffuses, nous avons expliqué l'origine volumique de la tension de surface : de façon non intuitive, c'est la forte variation de masse volumique dans la direction normale qui crée la tension dans la direction tangentielle.

En filtrant les équations monofluides avec un filtre à cheval sur l'interface, nous avons obtenu un système où les grandeurs varient continûment. Pour déterminer sa limite asymptotique discontinue, nous avons appliqué la méthode des DAR. Comme cette méthode est complexe et assez calculatoire, nous avons commencé par déduire, grâce au formalisme monofluide, les relations de saut que nous cherchons à fermer avec la méthode des DAR. Nous avons ensuite adimensionnalisé les équations. Cette étape d'adimensionnalisation est cruciale car elle détermine le comportement du système discontinu équivalent. Elle repose sur la distinction de deux échelles de longueurs dont l'une est caractéristique de la zone de transition et l'autre du problème macroscopique. Pour l'application de la méthode des DAR proprement dite, nous nous sommes placés dans le système de coordonnées associées à l'interface afin de tenir compte de la courbure des interfaces qui est un point clé de notre problème. Nous avons donc écrit chaque terme des équations dans un système de coordonnées généralisées faisant intervenir des facteurs d'échelles. De cette façon, nous avons concentré l'étude des équations suivant la direction normale en dilatant cette direction. Et, nous avons alors déterminé les relations de saut à l'interface en utilisant les conditions de raccord entre les solutions intérieure et extérieures. A l'ordre 0, nous avons trouvé que

- la vitesse est continue à l'interface, ce qui implique que l'on conserve l'hypothèse d'incompressibilité : le champ de vitesse monofluide du problème discontinu équivalent est à divergence nulle,
- les corrélations entre la vitesse et la masse volumique sont l'origine volumique d'une nouvelle force surfacique dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Cette force s'apparente aux forces interfaciales mais contrairement à elles, sa résultante n'est pas forcément normale à l'interface.

Ces conditions de saut ne sont pas uniquement définies par l'expression de la différence entre les grandeurs du liquide et les grandeurs du gaz, il faut aussi définir précisément le lieu où on doit les imposer, *i.e.* la localisation de la discontinuité équivalente. Nous avons logiquement choisi de définir la discontinuité équivalente de telle sorte que l'on conserve la masse (*i.e.* la masse en excès est nulle). Ce choix assure que l'on retrouve la position de l'interface de la SND lorsque le rayon de courbure est très grand devant la taille du filtre. Cette position pour la discontinuité équivalente nous a conduit à établir une nouvelle équation de transport de l'interface qui, en plus de la modélisation de type similarité d'échelles, fait intervenir la variation de la courbure.

Grâce à des tests *a priori*, nous avons montré que l'équation de la discontinuité équivalente obtenue modélise très bien le déplacement de l'interface filtrée discontinue. En particulier, nous avons vu la complémentarité du terme qui tient compte de la variation de la courbure et du modèle de similarité d'échelles. Même si on n'a pas introduit de nouveaux termes dans l'équation de bilan de quantité de mouvement par rapport au cas SGE continue, il serait intéressant de faire des tests *a priori* pour évaluer le saut de la limite asymptotique

discontinue des grandeurs filtrées à l'interface et le comparer à la prédiction du modèle¹⁰. Malheureusement, de tels tests sont difficiles à mettre en oeuvre car il nécessite de savoir faire le lien entre les champs de la SND et les champs filtrés discontinus (voir paragraphe 6.6.1). Face à cette difficulté non résolue, nous proposons d'implémenter nos modèles et de réaliser, dans le chapitre suivant, une première étude *a posteriori*, c'est-à-dire de comparer le résultat d'un calcul avec le concept ISS et celui d'une SND.

¹⁰Ce travail n'aurait pas pour but de valider l'étape de modélisation (nous l'avons déjà fait dans le chapitre précédent) mais de valider l'étape analytique des DAR.

Une première validation des nouveaux modèles

DANS CE CHAPITRE, on réalise la première étude *a posteriori* des modèles que nous avons développés. Nous avons choisi de faire cette étude sur le cas test de l'ascension d'une bulle à contre-courant (voir paragraphes 4.3 et 3.3.1). Ce choix est motivé par le fait que l'on désire effectuer une étude paramétrique afin de mettre en évidence les effets de chacune des fermetures que nous avons introduites. Par conséquent, le cas d'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille est trop coûteux numériquement. De plus, le meilleur critère de validation des modèles du concept ISS nous semble être la position du centre de gravité de la bulle. Or, le cas de l'ascension de la bulle est le seul cas 2D que nous avons simulé où le centre de gravité de l'inclusion se déplace significativement.

7.1 Hypothèses supplémentaires

7.1.1 Ecriture sous forme non conservative

La méthode numérique dont nous disposons est écrite sous forme non conservative. Par conséquent, pour tester les modèles que nous proposons, il faut écrire l'équation de bilan de quantité de mouvement (6.128c) sous forme non conservative. On trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\rho}) \tilde{\mathbf{u}} = & -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) + \underbrace{\tilde{\mathcal{L}} \cdot \nabla \tilde{\rho}}_{(i)} + \underbrace{\tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{L}})}_{(ii)} \\ & - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi_3}_{(iii)} \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Le terme (ii) est le seul terme qui existe en SGE dans les situations monophasiques. Dans notre cas, il correspond à l'hypothèse de similarités d'échelles. Le terme (i) est l'effet de ce terme à l'interface. Le terme (iii) correspond au corrélation entre la masse volumique et la

vitesse, il corrige les erreurs de transfert de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique dues à la sous-résolution. Il est le seul terme écrit sous la forme d'une grandeur en excès. Comme les forces superficielles, les deux termes, (i) et (iii), sont des forces surfaciques.

7.1.2 Evolution de la courbure

Pour les tests *a priori* du chapitre précédent, nous avons implémenté les opérateurs de dérivation surfacique dans des outils de postraitement. Malheureusement, par manque de temps mais aussi parce que de tels opérateurs sont plus faciles à mettre en oeuvre pour le postraitement qu'au coeur du code Trio-U, nous n'avons pas implémenté ces opérateurs dans la méthode de Front-tracking. Cependant, dans le cas test que nous avons choisi, la courbure évolue peu comparativement au cas de l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille. De plus, le cas est laminaire et 2D. On suppose que dans ces conditions, on peut négliger le terme lié à l'évolution de la courbure devant celui de l'hypothèse de similarité d'échelle dans l'équation de transport de la discontinuité équivalente. Plus précisément, on imagine que, dans ces conditions, la différence de comportement entre ces deux termes que nous avons décrite dans le paragraphe 6.6.5 est négligeable¹ et que l'hypothèse de similarité d'échelle peut très bien jouer le rôle du terme qui tient compte de la variation de la courbure. Soit c une constante, on peut résumer l'hypothèse précédente par l'équation

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^s \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} \approx c \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (7.2)$$

dans le cas d'un écoulement faiblement turbulent avec de faibles variations de la courbure. Sous cette hypothèse supplémentaire, l'équation de transport de la discontinuité équivalente (6.128b) s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \underbrace{\left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^s \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} \right)}_{(iv)} \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (7.3)$$

où le terme (iv) correspond à l'hypothèse de similarités d'échelles surfacique.

7.1.3 Evaluation de la grandeur en excès

La mise en oeuvre de procédures d'évaluation de grandeurs en excès est relativement complexe. En effet, les grandeurs en excès sont définies sur l'interface, donc elles sont discrétisées aux positions des marqueurs lagrangiens. Pour les évaluer sur un marqueur donné, il faut pouvoir identifier les mailles eulériennes qui sont traversées par la droite normale à l'interface et passant par ce marqueur. Par conséquent, pour cette première implémentation de nos modèles, nous avons décidé de calculer les corrélations $\frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t}$ sur tous les éléments du maillage eulérien et d'approcher, en chaque marqueur, la grandeur en excès associé à ce terme par son interpolation aux coordonnées du marqueur. Une autre difficulté pour évaluer ce terme concerne la dérivée temporelle. Nous avons choisi de réaliser un simple point fixe en deux itérations car la troisième n'apporte plus rien.

¹Dans le paragraphe 6.6.5, on a en effet constaté que pour $t = 500\Delta_t$ (la courbure de la bulle varie alors beaucoup moins car elle se trouve en bas du domaine de calcul où l'intensité de la turbulence de grille est beaucoup plus faible du fait de la décroissance spatiale), les deux termes sont très proches.

Dans la suite de ce chapitre, on veut avoir une idée qualitative de l'effet de chacun des termes (i), (ii), (iii) et (iv). Pour ce faire, on réalise cinq calculs : quatre où on ne tient compte que de l'un des quatre termes et un cinquième où on regarde l'effet combiné de chacun de ces termes.

7.2 Tests *a posteriori*

Comme nous l'avons mentionné, il nous semble qu'un bon juge de paix pour valider les modèles de ce travail de thèse est l'évolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle. Dans ce paragraphe, on se concentre donc sur ce point et on compare l'évolution de cette coordonnée suivant les termes de modélisation dont on tient compte ainsi que suivant le raffinement des maillages eulérien et lagrangien.

7.2.1 Raffinement lagrangien

Au paragraphe 3.3, nous avons proposé un modèle de diffusion de courbure qui permet d'éviter le développement d'instabilités numériques lorsque l'on raffine le maillage lagrangien sans raffiner le maillage eulérien. Cette méthode est maintenant couramment utilisée dans le laboratoire pour les SND. Un des intérêts des tests *a posteriori*, et de vérifier l'apport de cette méthode pour les calculs de SGE diphasique, *i.e.* lorsque ses effets sont combinés avec ceux des modèles que nous avons développés. Cependant, il ne faut pas que la solution d'un calcul de SGE diphasique dépende du maillage lagrangien. C'est pourquoi, on choisit de raffiner suffisamment le maillage lagrangien pour avoir convergé (du point de vue de la discrétisation de l'interface). La figure 7.2 illustre le fait qu'une mauvaise discrétisation de l'interface implique une mauvaise évaluation des forces de frottement et de flottabilité, car le périmètre et l'aire de la bulle sont sous-estimés (voir paragraphe 3.3). Raffiner le maillage lagrangien permet d'y remédier. On remarque que les courbes obtenues avec deux ou quatre marqueurs lagrangiens par maille eulérienne sont presque identiques. On estime qu'on a atteint la convergence avec seulement deux marqueurs et on effectue les calculs pour tester les modèles dans ce cas (maillage grossier 150x150, deux marqueurs lagrangiens par maille eulériennes et un opérateur de convection centré).

7.2.2 Effet des différents termes

La notation *parami_j_k_l* des figures 7.1, 7.3 et 7.4 indique quels sont les termes dont on tient compte parmi les modèles (i), (ii), (iii) et (iv). Ainsi, le calcul *param1_0_0_0* (respectivement *param0_1_0_0*, *param0_0_1_0* et *param0_0_0_1*) ne tient compte que du terme (i) (respectivement (ii), (iii) et (iv)), les autres termes étant modélisés par zéro. Dans tous les cas, il s'agit d'un calcul grossier 150x150 avec deux marqueurs lagrangiens par maille eulérienne et un opérateur de convection centré. Sur la figure 7.3, le terme (iii) semble être le terme le moins significatif. Ceci est sûrement dû au fait que le saut de masse volumique est faible ($\rho_G = 990 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_L = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$). Les termes (i) et (ii) ont globalement l'effet d'une viscosité turbulente : augmenter le frottement moyen de la bulle, le terme (iv) apparaît être le seul à avoir l'effet inverse (diminuer le frottement moyen autour de la bulle). Sur la figure 7.4, on constate que les effets combinés des différents modèles conduisent à une sur-estimation du frottement moyen. D'après les constats précédents, on peut, afin d'y remédier, pondérer les termes (i) et (ii) par des coefficients inférieurs à un ou, au contraire, pondérer le terme (iv)

par un coefficient supérieur à un. Comme les tests *a priori* que nous avons faits concluent que τ_{conv}^{nm} sous-estime le terme sous-maille qu'il modélise, τ_{conv} (voir les corrélations des figures 5.22, 5.24 et 5.26), on n'a moralement pas envie de pondérer les termes (i) et (ii) qui en sont issus par des coefficients inférieurs à un. D'autre part, on a vu, de la même façon, que τ_{interf}^{nm} sous-estime légèrement τ_{interf} (voir les corrélations de la figure 5.20). De plus, la détermination *a priori* des paramètres du modèle discontinu au paragraphe 6.6.4 indique qu'il faut pondérer ce modèle par le coefficient 1,5. Enfin, dans ces tests *a posteriori*, on n'a pas implémenté le terme qui tient compte de la variation de la courbure car on a supposé que l'hypothèse de similarités d'échelles pouvait jouer son rôle. Il paraît donc licite de pondérer le terme (iv) par un coefficient supérieur à 1,5. Cela conduit au calcul *param1.1.1.2* où on tient compte de l'effet combiné de tous les termes de modélisation et où on a pondéré le terme (iv) par 2. L'équation de transport de l'interface s'écrit alors :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + 2 \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}}^s \cdot \overline{\tilde{\mathbf{n}}}^s \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (7.4)$$

Sur la figure 7.1, on vérifie que l'évolution de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle qui correspond à ce calcul (*param1.1.1.2*) se trouve bien entre les deux tendances de convergence (schéma Quick d'une part et schéma centré d'autre part). Ainsi, les modèles proposés permettent de corriger la position de la bulle et ce tout au long du calcul.

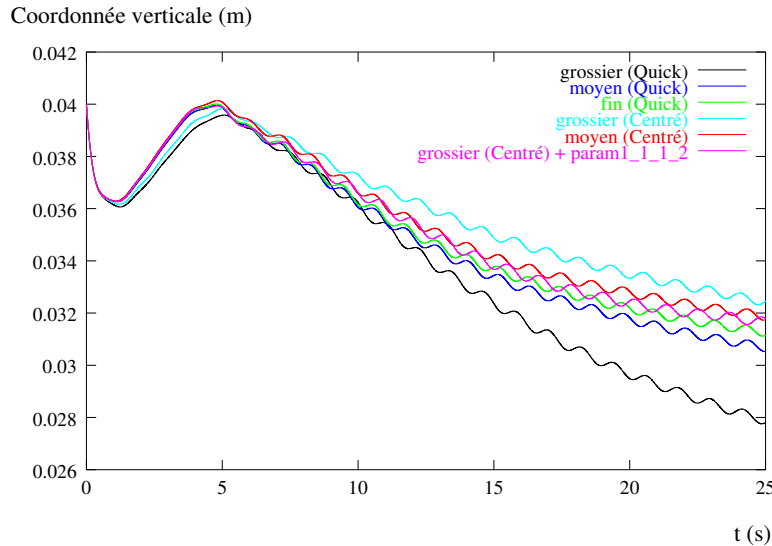


FIG. 7.1 – Convergence en maillage (grosier 150x150, moyen 300x300, fin 375x375)

7.3 Conclusion

Les résultats présentés ici nous paraissent prometteurs. Ils sont cohérents avec l'ensemble des tests *a priori* que nous avons réalisés et montrent le gain en coût calcul sans perte d'informations que permettent nos modèles. Nous savons que le cas choisi du fait du faible saut de masse volumique rend peu importants les termes de l'équation de quantité de mouvement spécifiques au cas diphasique (ceux qui font intervenir ρ). Cependant, notre cas met au moins en évidence l'importance du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface (corrélation de la vitesse et de la normale) et le bon comportement de notre modèle. En particulier, il est important de se rappeler que notre modélisation est issue des deux étapes successives où on a d'abord appliqué un filtre centré à cheval sur l'interface puis transformé la zone de transition en une discontinuité équivalente. Selon nous, même si les modèles sont

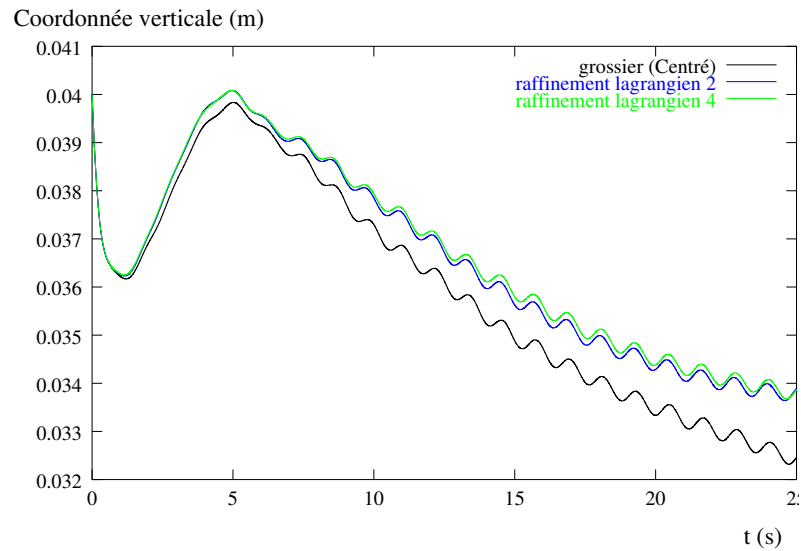


FIG. 7.2 – Convergence du raffinement lagrangien
(2 : deux points lagrangiens par maille eulérienne, 4 : quatre points)

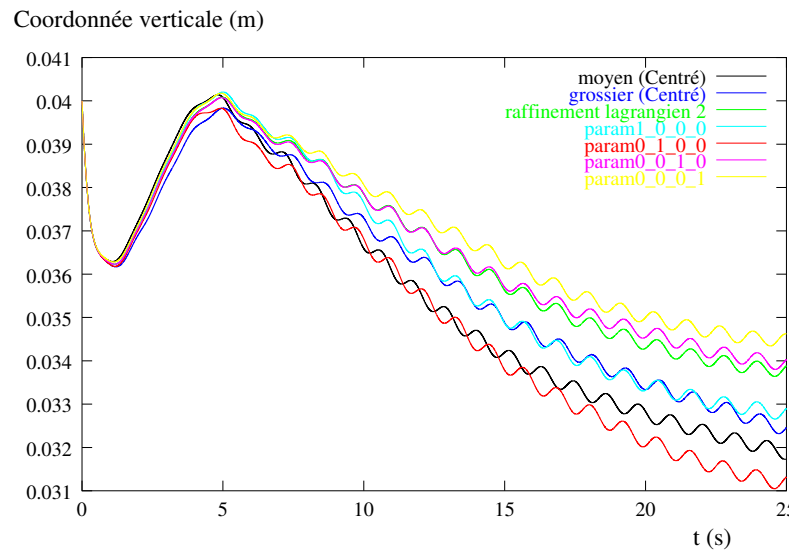


FIG. 7.3 – Etude de l'effet isolé de l'estimation des différents termes sous-maille

certainement perfectibles, ces tests *a posteriori* valident la démarche que nous avons élaborée qui consiste justement à distinguer ces deux étapes et qui permet ainsi d'intégrer dans les modèles l'interaction entre l'écoulement des phases et l'interface.

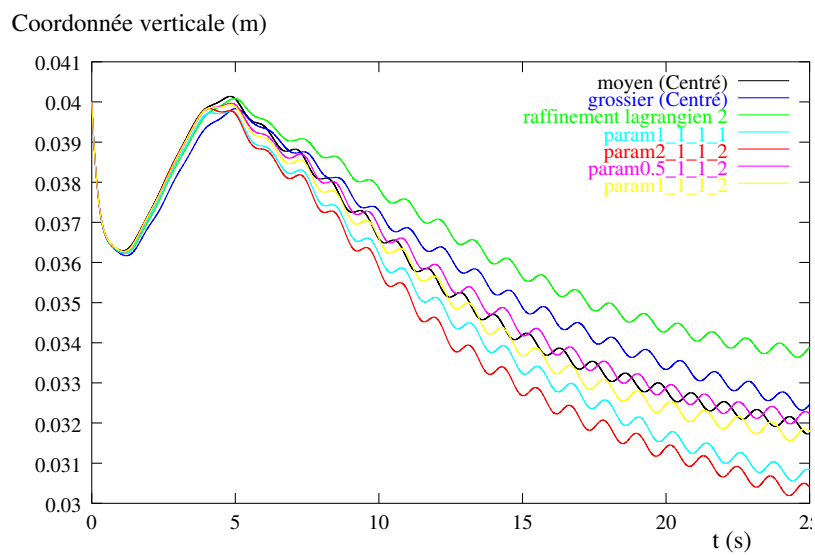


FIG. 7.4 – Etude de l'effet combiné de l'ensemble des modèles pour différentes pondérations

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail de thèse a abouti, pour la première fois à notre connaissance, aux développements de modèles de SGE diphasiques qui tiennent compte des couplages fortement non linéaires qui existent entre les interfaces et la turbulence, et où les interfaces sont supposées bien résolues alors que les petites échelles de la turbulence sont modélisées. En effet, nous avons mis en évidence l'existence de termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques qui n'ont jamais fait l'objet de modélisation. Or, nous avons montré qu'un certain nombre d'entre eux avaient une importance significative dans la dynamique de l'écoulement et ce même en laminaire. En utilisant des méthodes issues de la modélisation de la turbulence des écoulements monophasiques ou de la modélisation de la physique des interfaces des écoulements diphasiques, nous avons proposé, et validé sur des tests *a priori*, des fermetures pour ces termes. On résume ici les principales étapes originales de ce travail :

- Des SND de situations d'écoulements pertinentes ont été réalisées, validées et exploitées. Ceci a été possible grâce à l'existence, dans notre laboratoire, d'une méthode performante mixte Front-tracking/VOF. Nous avons participé à l'amélioration de cette méthode (i) en augmentant la précision de la description géométrique des bulles grâce à une méthode de raffinement du maillage lagrangien, (ii) en proposant une nouvelle discrétisation du tenseur des contraintes visqueuses et (iii) en implémentant un schéma en temps de type Runge-Kutta 3 capable de gérer le couplage des différentes équations de la méthode numérique. De plus, nous avons mis en oeuvre une méthode de forçage linéaire de la turbulence qui permet de fournir des conditions d'entrée réalistes et turbulentes. Nous avons ainsi pu simuler l'interaction d'une turbulence de grille et d'une bulle vraiment déformable. Ce genre de SND est relativement rare dans la littérature. Outre l'utilisation que nous en avons faites pour développer le concept ISS, ce type de calcul devrait permettre d'enrichir des modélisations statistiques des écoulements diphasiques à bulles par exemple. Il s'agirait d'étudier les phénomènes à l'échelle de la bulle (et non à l'échelle des déformations de son interface) en mesurant par exemple son agitation en fonction de l'intensité turbulente. Dans ce but, nous avons commencé à caractériser la turbulence de grille en l'absence d'inclusion.
- Une modélisation de type SGE adaptée aux écoulements diphasiques et avec une vision continue des interfaces a été proposée. En appliquant un filtre centré, éventuellement à cheval sur les interfaces, aux équations monofluides, nous avons exhibé des termes sous-maille spécifiques aux situations diphasiques. Nous avons retrouvé formellement le fait que la géométrie de l'interface est dégradée avec la sous-résolution. Par conséquent, nous avons montré que les modèles devaient non seulement tenir compte de la turbulence mais également de la présence d'une discontinuité. L'étude des ordres de grandeurs des différents termes sous-maille nous a permis de négliger certains d'entre eux pour nous concentrer sur la modélisation des termes prépondérants. L'adaptation de la décomposition de Leonard revisitée par Germano à ces termes spécifiques, nous a conduit

à développer des modèles du type similarités d'échelles. Les nombreux tests *a priori* que nous avons effectués montrent que nos modèles sont extrêmement bien corrélés avec la contribution réelle des termes sous-maille. L'implémentation des termes principaux de notre modélisation et une première comparaison des résultats qu'elle fournit sur un maillage deux fois plus grossier que le maillage du calcul SND résolu confirme la capacité de nos modèles à diminuer notablement le coût numériquement sans véritablement en affecter la précision.

- Alors que de nombreuses et récentes études démontrent les effets conséquents du caractère déformable des inclusions sur les propriétés de l'écoulement, nous avons intégré dans des modèles sous-maille les effets de la variation de la courbure de l'interface. La méthode des DAR nous a permis de préciser les relations de saut des grandeurs filtrées et d'établir une nouvelle équation de transport de la discontinuité équivalente. Il est apparu que le saut du tenseur des contraintes, simplement égal aux forces superficielles pour les grandeurs exactes, dépend également des corrélations entre la vitesse et la masse volumique, *i.e.* des corrélations entre la vitesse et la géométrie de l'interface. Puisque ces corrélations apparaissent sous la forme d'une dérivée temporelle, on a donc, dans le cas de simulations sous-résolues, en plus des forces superficielles classiques qui sont proportionnelles à la courbure, une force surfacique dont l'intensité dépend de l'évolution temporelle de la géométrie de l'interface. De façon encore plus claire, l'équation de transport de la discontinuité équivalente que nous avons obtenue fait apparaître explicitement l'évolution temporelle de la courbure de l'interface. Grâce à des tests *a priori*, nous avons montré la nécessité de tenir compte de cette dépendance pour prédire correctement la vitesse des interfaces.

Perspectives

Les perspectives ouvertes par ces travaux sont nombreuses. On les énonce en commençant par le court terme pour aller progressivement vers le moyen et long terme, en oubliant tous les obstacles que la physique aura sans doute semés sur ce trajet.

Tout d'abord, il est nécessaire de finir l'implémentation des modèles que nous avons proposés afin de réaliser de nouvelles validations *a posteriori*, c'est-à-dire de vérifier que l'ajout de modèles lors de calculs sous-résolus permet de se rapprocher de la solution fournie par la SND. En effet, du fait, par exemple, de la diffusion numérique, l'apport des modèles de la SGE n'est pas toujours flagrant et ce même en monophasique. Dans le cadre de l'ANR Simulation Turbulence et Interfaces, il est prévu de vérifier, pour une surface libre cisailée, que les très bons résultats que nous avons obtenus à partir de tests *a priori* ne dépendent pas de conditions particulières de l'écoulement, que l'implémentation de nos modèles ne crée pas d'instabilité numérique et qu'aucun effet de la sous-résolution n'a été sous-estimé. Cependant, la démarche que nous avons mise en place lors de l'élaboration du concept ISS est complète et s'il est évident que les modèles que nous proposons devront être adaptés et retravaillés, nous sommes maintenant certains de leur potentiel.

Une fois ces premiers modèles validés, il sera alors nécessaire de relaxer certaines des hypothèses. En effet, un des programmes à long terme dans laquelle s'inscrit cette étude est la simulation de situation d'ébullition convective. Cet objectif étant trop ambitieux pour être atteint directement, les difficultés ont été scindées pour les rendre plus abordables et la modélisation physico-numérique du changement de phase, a fait l'objet de nombreux travaux [41, 20, 62] antérieurs à cette thèse. Cependant, nous avons pour l'instant établi nos modèles dans le cas sans changement de phase. Il s'agit donc d'une étape préliminaire et

il faudra compléter nos modèles afin de tenir compte du changement de phase. Nous avons d'ailleurs fait un premier pas dans cette direction en réalisant des tests *a priori* dans des situations anisothermes sans changement de phase. Le même type de modèles que celui développé pour l'équation de bilan de quantité de mouvement dans ce mémoire, fonctionne très bien pour l'équation de température [97]. Une autre hypothèse que nous avons faite concerne les déformations de l'interface : nous avons supposé que son plus petit rayon de courbure était plus grand que la taille de la maille. Pourtant, dans des situations industrielles, les bulles sont susceptibles d'être suffisamment déformées pour qu'une partie de leur géométrie soit non résolue. Comme nous l'avons montré, les interactions entre interfaces et turbulence se caractérisent par des échanges entre l'énergie d'interface et l'énergie cinétique des phases. Une façon de tenir compte des transferts non résolus serait donc d'établir des équations d'évolution de l'énergie d'interface non résolue et de l'énergie cinétique turbulente. On peut alors espérer qu'un tel outil aide à mieux comprendre un certain nombre de phénomènes physiques tels que les interactions entre plusieurs bulles et la crise d'ébullition.

De façon plus générale, le concept ISS doit, à terme, permettre de réaliser des calculs dont le degré de précision est proche de celui de la SND et dont le coût numérique est très inférieur. Par conséquent, il est un niveau de modélisation intermédiaire entre les codes industriels (basés sur un modèle à deux fluides moyennés en volume et statistiquement) et les codes de SND. Par intermédiaire on entend qu'il se construit principalement grâce aux informations issues de SND et que l'un de ces objectifs concrets et pragmatiques est d'enrichir les modèles des codes industriels. Dans les codes industriels du domaine du nucléaire, on peut distinguer trois niveaux de modélisation : le niveau *Système* qui correspond à l'ensemble du réacteur et une partie de ses auxiliaires, le niveau *Composant* qui ne s'intéresse qu'au coeur du réacteur ou à un générateur de vapeur et le niveau *3D local* qui concerne quelques canaux du coeur. En partant du niveau le plus fin, ce mémoire illustre par exemple comment chaque niveau peut être utilisée pour enrichir les niveaux moins détaillés. Une réflexion collective, principalement au sein de notre laboratoire, est amorcée afin d'élargir cette démarche multiéchelle.

Annexes

Spectre d'énergie d'interface

POUR ÉTUDIER les mécanismes d'interaction interface/turbulence, il est intéressant de disposer d'un outil permettant de connaître le spectre instantané de l'énergie d'interface. En effet, on sait qu'une interface interagit de façon sélective avec l'énergie cinétique turbulente, à la manière d'un filtre. Les structures tourbillonnaires provoquent des déformations de l'interface qui va donc osciller et rétrocéder de l'énergie aux phases mais pas nécessairement aux échelles de temps ou de longueurs initiales. De plus, on ne sait pas évaluer *a priori* l'échelle des plus petites déformations de l'interface énergétiquement actives (alors qu'on sait le faire pour les plus petites structures turbulentes au sein d'une phase : c'est l'échelle de Kolmogorov). Un outil de calcul des spectres d'énergie d'interface permet une évaluation *a posteriori* qui, si elle est faite systématiquement, notamment pour beaucoup de valeurs du nombre d'Ohnesorge, pourrait conduire à une relation permettant de déduire la taille des plus petites déformations de l'interface à partir des grandeurs caractérisant cet écoulement. Pour construire une représentation spectrale de l'énergie d'interface, on a besoin des fonctions de base adaptées : les harmoniques sphériques. Après avoir rappelé leur définition, on expliquera la méthode d'obtention d'un spectre d'énergie interfaciale et on donnera un exemple.

A.1 Les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques correspondent aux modes propres des déformations d'une inclusion (pour plus de détail sur ce problème physique, on se référera à [51] ou [69]). Ces harmoniques sont reliées aux polynômes de Legendre, P_n^m (n est le degré et m l'ordre du polynôme), par la relation

$$Y_n^m = c_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos(\theta)), \quad 0 \leq m \leq n \quad (\text{A.1})$$

où on a introduit l'exponentielle complexe. La définition des angles θ et φ est précisée par la figure A.1. Le coefficient c_n^m est le coefficient de normalisation,

$$c_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (\text{A.2})$$

qui assure l'orthonormalité de la base,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_l^k \overline{Y_n^m} \sin\theta d\theta = \delta_{km} \delta_{ln}, \quad (\text{A.3})$$

δ_{km} est le symbole de Kronecker (il vaut 0 si $k \neq m$ et 1 sinon) et l'opérateur $\overline{\cdot}$ associé à tout complexe le complexe conjugué.

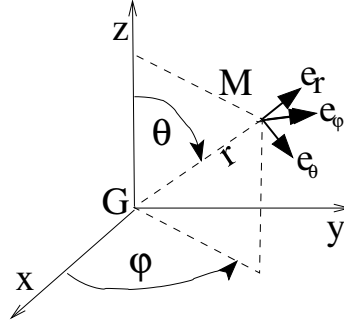


FIG. A.1 – Coordonnées sphériques

Une fonction, f , définie sur une sphère se décompose de façon unique :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{-n \leq m \leq n} f_n^m \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.4})$$

$$f_n^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta \quad (\text{A.5})$$

$$Y_n^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.6})$$

Pour calculer les polynômes de Legendre, on peut avoir recourt à des formules explicites sous forme de somme mais ces dernières nécessitent des calculs de factorielles de grands nombres et des simplifications délicates entre les termes successifs dont le signe alterne. Il est donc préférable d'utiliser des formules de récurrence. Malheureusement, la plupart des récurrences sur m sont instables et sont donc à éviter lors d'un travail numérique. En effet, la relation

$$P_n^{m+1}(z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} ((n-m)z P_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z)), \quad z = \cos\theta$$

est dangereuse lorsque θ tend vers 0 ou π . On utilisera donc les formules suivantes issues de [69]

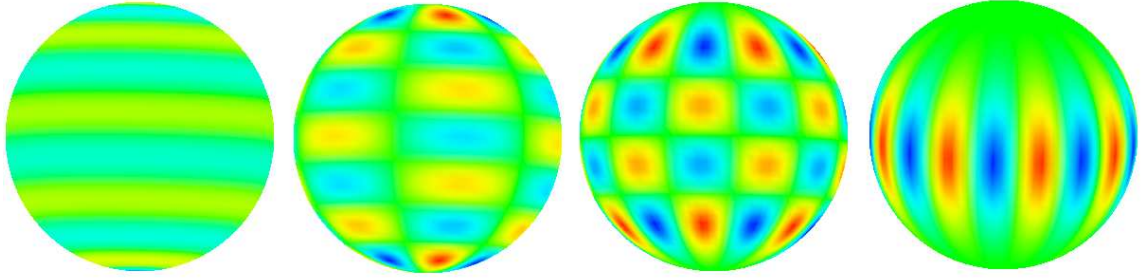
$$P_m^m(z) = (-1)^m (2m-1)!! (1-z^2)^{m/2} \quad (\text{A.7})$$

$$P_{m+1}^m(z) = z(2m+1)P_m^m(z) \quad (\text{A.8})$$

$$(n-m)P_n^m = z(2n-1)P_{n-1}^m - (n+m-1)P_{n-2}^m, \quad 0 \leq m \leq n-2 \quad (\text{A.9})$$

où $n!!$ est le produit des entiers impairs de 1 à n .

La figure A.2 montre quelques fonctions harmoniques sphériques de degré 9 et d'ordre variable. Ce sont donc des surfaces qui enveloppent la sphère et qui présentent des ondulations de part et d'autre de zéro, en rouge les zones positives, en bleu les zones négatives, et en vert les passages par zéro. La propriété est que la fonction harmonique sphérique passe autant de fois par zéro que ce que vaut son degré n . Parmi ces passages par zéro, m se font suivant une longitude, et donc $n-m$ suivant une latitude.

FIG. A.2 – Représentation des harmoniques sphériques Y_9^0 , Y_9^3 , Y_9^6 et Y_9^9 .

A.2 Spectre d'énergie interfaciale

A.2.1 Surface d'un sphéroïde

On définit le barycentre de surface d'un sphéroïde, S , comme le point G vérifiant

$$\int_{M \in S} \mathbf{GM} d\sigma = 0$$

On se place dans le repère associé aux coordonnées sphériques dont l'origine est le barycentre de surface du sphéroïde, l'élément de surface s'écrit

$$d\sigma = \|D_\theta f \wedge D_\varphi f\| d\theta d\varphi \quad (\text{A.10})$$

où \wedge est un produit vectoriel et f est la fonction qui a tout couple d'angles associe le vecteur position du point correspondant du sphéroïde :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto \mathbf{GM} = r(\theta, \varphi) e_r \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} D_\theta f &= r e_\theta + \frac{\partial r}{\partial \theta} e_r \\ D_\varphi f &= r \sin \theta e_\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} e_r \end{aligned}$$

et la surface, s , est donnée par :

$$s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right)} d\theta \quad (\text{A.11})$$

En faisant l'hypothèse des petites déformations au sens où la normale à la surface est à peu près confondue avec e_r (ce qui signifie que l'amplitude des perturbations doit être d'autant plus faible que leur fréquence est élevée), on a à l'ordre deux :

$$s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 Spectre d'énergie interfaciale

Dans le cas où la tension de surface est supposée constante, l'énergie d'interface est directement proportionnelle à la surface de l'interface en question. En utilisant les équations (A.4) et (A.5) appliquées à la fonction $(\theta, \varphi) \mapsto r$, puis la propriété d'orthogonalité (A.3), l'équation (A.12) devient :

$$s = \sum_{n \geq 0} \sum_{-n \leq m \leq n} \|r_n^m\|^2 \quad (\text{A.13})$$

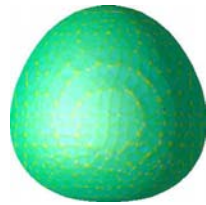
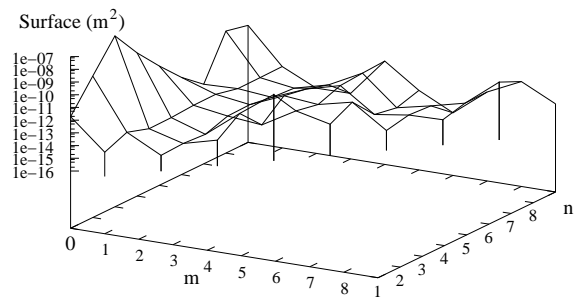
On a ainsi obtenu une décomposition spectrale de l'énergie d'interface. La propriété (A.6) implique que $\|r_n^{-m}\|^2 = \|r_n^m\|^2$. Par conséquent, pour m strictement positif, il n'est pas utile de calculer les coefficients r_n^{-m} , ni même de représenter dans le spectre d'énergie d'interface les $\|r_n^{-m}\|^2$.

A.2.3 Validation de notre implémentation du calcul du spectre d'énergie interfaciale

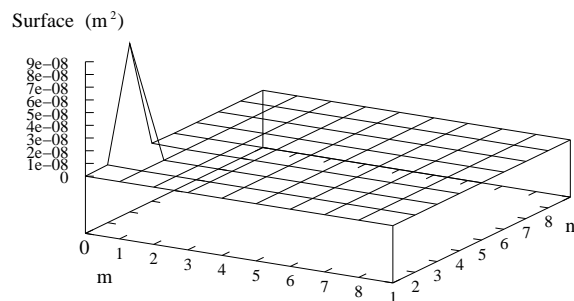
On a généré un maillage d'interface correspondant à l'harmonique sphérique Y_3^0 . L'interface est représenté figure A.3(a) et l'échelle de couleur représente la courbure. Ce maillage d'interface a alors été postraité comme s'il s'agissait du résultat d'un calcul et on a obtenu les spectres d'énergie présentés figures A.3(b) et A.3(c). On constate (fig. A.3(c)) que toute l'énergie de la perturbation est bien sur le mode attendu ($m = 0$ et $n = 3$). Mais la figure A.3(b) (en échelle log) montre que le signal est très bruité, ce qui limitera sans doute les applications de cette méthode.

A.3 Conclusion

A partir de la décomposition de la géométrie de l'interface sur les harmoniques sphériques, nous avons défini le spectre d'énergie d'une interface puis nous avons implémenté un outil de postraitement pour tracer ce spectre.

(a) Maillage du mode Y_3^0 

(b) Spectre d'énergie d'interface en échelle log. Le mode (0,3) est 7000 fois plus grand que le pic suivant, le mode (0,8) et 150 fois plus grand que le mode suivant (0,4) qui est le deuxième maximum.



(c) Spectre d'énergie d'interface

FIG. A.3 – Spectre d'énergie de surface

Grandeur en excès

DANS LE CHAPITRE 6, on a introduit trois définitions de la grandeur en excès. Cette grandeur permet de faire le lien entre une vision continue et une vision discontinue des interfaces. Dans cette annexe, on discute rapidement de l'équivalence de ces trois définitions dans le cas d'une interface sphérique. On montre ainsi que si l'on désire respecter un principe de conservation seule la définition à partir d'un volume de contrôle est satisfaisante.

B.1 Trois définitions

Dans le chapitre 6, on a présenté trois définitions d'une grandeur en excès $(\bar{\phi})^{ex}$. Ces grandeurs sont utilisées dans l'analyse générique des processus interfaciaux [23]. En notant $\bar{\phi}$ la grandeur à l'échelle microscopique et $\tilde{\phi}$ celle à l'échelle macroscopique, on a

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex} dS = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dV \quad (\text{B.1a})$$

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} d\mathbf{L} = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\mathbf{S} \quad (\text{B.1b})$$

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_0^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.1c})$$

où V est le volume de contrôle défini dans la zone interfaciale, A la portion d'interface incluse dans ce volume, ∂A le contour de cette surface A et r la distance par rapport au centre de l'inclusion. L'équation (B.1a) définit la grandeur en excès à partir d'un bilan sur un volume de contrôle. Elle respecte donc la notion de conservation. La définition (B.1b) utilise une formulation en terme de flux et la relation (B.1c) est une simple intégration suivant la direction normale.

Afin de pouvoir comparer simplement ces trois définitions, on se restreint à l'étude du cas d'une interface sphérique de rayon R . On se place en coordonnées sphérique (r, θ, φ) avec l'origine au centre de l'inclusion. L'équation de l'interface sphérique est donc $r = R$ et la zone de transition d'épaisseur 2δ correspond à la région de l'espace $R - \delta < r < R + \delta$. Les notations géométriques sont précisées par la figure B.1.

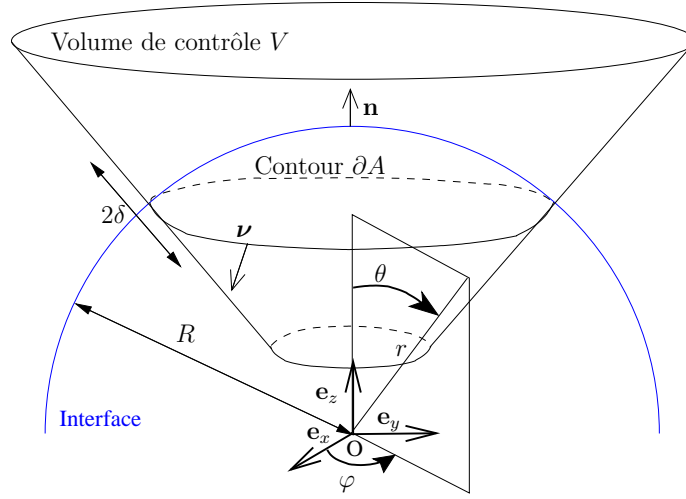


FIG. B.1 – Définition 3D du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et des coordonnées sphériques

B.2 Ecriture 1D de la définition volumique

En coordonnées sphériques, la définition (B.1a) s'écrit :

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex} (\theta, \varphi) R^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) (r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi dr \quad (\text{B.2a})$$

Puisqu'elle est valable pour tout volume de contrôle V contenant la zone de transition, on peut se restreindre à un volume suffisamment petit pour pouvoir négliger les variations des grandeurs en fonction de θ et de φ :

$$(\bar{\phi})^{ex} R^2 \int_A \sin\theta \, d\theta d\varphi = \int_0^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) r^2 dr \int_A \sin\theta \, d\theta d\varphi \quad (\text{B.2b})$$

En simplifiant par $\int_A \sin\theta \, d\theta d\varphi$, on obtient :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{R^2} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) \, dr \quad (\text{B.2c})$$

En se souvenant que les grandeurs à l'échelle microscopique et celle à l'échelle macroscopique diffèrent seulement dans la zone de transition interfaciale ($R - \delta < r < R + \delta$), l'intégrale précédente se réécrit :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{R-\delta}^{R+\delta} \frac{r^2}{R^2} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) \, dr \quad (\text{B.2d})$$

En faisant le changement de variable $z = r - R$, on trouve finalement :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 + 2\frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \right) (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) \, dz \quad (\text{B.2e})$$

B.3 Ecriture 1D de la définition à partir des flux

On choisit la base canonique fixe ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) telle que l'angle θ soit constant sur le contour ∂A . L'équation de ce contour est alors $\theta = \theta_0$. En notant $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur surfacique (*i.e.* qui

est tangent à l'interface) normal au contour ∂A , la définition (B.1b) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} R \sin\theta_0 \nu d\varphi = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) r \sin\theta_0 \nu d\varphi dr \quad (\text{B.3a})$$

Comme précédemment, cette définition est valable pour tout volume de contrôle V . On peut donc choisir θ_0 tel que l'on puisse négliger les variations des grandeurs par rapport à φ . Après des simplifications similaires à celles faites dans le paragraphe précédent, on trouve :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{R-\delta}^{R+\delta} \frac{r}{R} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.3b})$$

Avec le même changement de variable que pour la définition volumique $z = r - R$, on obtient ici :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dz \quad (\text{B.3c})$$

B.4 Réécriture de la définition 1D

En limitant le support de l'intégrale à la zone de transition interfaciale et en faisant le changement de variable $z = r - R$, la définition 1D (B.1c) devient simplement :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dz \quad (\text{B.4})$$

B.5 Conclusion

En se limitant à l'étude d'une interface sphérique, on a montré facilement que chaque définition de la grandeur en excès se réécrit comme une simple intégrale suivant la direction normale. On constate que seules les deux premières définitions font intervenir la courbure de l'interface. Si on désire préserver la notion de conservation, il faut nécessairement raisonner de façon volumique en faisant des bilans. Puisque les définitions par flux et purement monodimensionnelle ne sont pas équivalentes à la définition volumique, elles peuvent être insuffisantes. Cependant, à l'ordre 0 en $\epsilon = \frac{\delta}{R}$, les trois définitions sont rigoureusement équivalentes.

Dans ce mémoire, on s'arrête à l'ordre 0 pour les développements asymptotiques raccordés donc, lors de cette analyse, on confond ces trois définitions. En revanche, afin de conserver la masse, on détermine la position de la discontinuité équivalente à partir de la définition volumique.

Système de coordonnées associées à l'interface

LA MÉTHODE des développements asymptotiques raccordés revient à dilater la direction dans laquelle les grandeurs varient fortement et rapidement. Dans le cas des écoulements diphasiques, les grandeurs varient rapidement dans la direction normale à l'interface lorsque l'on en est suffisamment proche. Pour faire un changement de variable suivant la direction normale, il faut au préalable se placer dans un système de coordonnées associées à l'interface. Puisque ce système de coordonnées est en partie curviligne, les opérateurs de dérivation définis dans ce système font intervenir des facteurs d'échelles. Dans cette annexe, on définit le système de coordonnées associées à l'interface dont le paramétrage de la surface se fait suivant les directions principales. On écrit alors les différents opérateurs de dérivations dans ce système.

C.1 Base naturelle associée à l'interface

Soit (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le système de coordonnées associé à l'interface. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Le point courant M s'exprime en fonction de ces coordonnées par la relation

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r}_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{n} \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface [2, 32, 3]. On note $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ les vecteurs unitaires tangents à l'interface, parallèles aux directions principales de courbure. Ces deux directions sont orthogonales [32]. La base naturelle $\{\mathbf{g}_i\}$ associée à ce système de coordonnées est définie par :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_i} \quad (\text{C.2})$$

On a donc

$$\mathbf{g}_1 = (1 - \xi_3 \kappa_1) \mathbf{t}_1, \mathbf{g}_2 = (1 - \xi_3 \kappa_2) \mathbf{t}_2, \mathbf{g}_3 = \mathbf{n} \quad (\text{C.3})$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales ([2, 32]). Soit \mathbf{V} un vecteur, on a $\mathbf{V} = V^i \mathbf{g}_i$. Les composantes V^i sont appelées *composantes contravariantes* du vecteur \mathbf{V} sur la base $\{\mathbf{g}_i\}$. On définit la base duale $\{\mathbf{g}^i\}$ de la base naturelle par les relations suivantes

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (\text{C.4})$$

et on a $\mathbf{V} = V_i \mathbf{g}^i$. Les composantes V_i sont appelées *composantes covariantes* du vecteur \mathbf{V} . Le tenseur métrique est défini par :

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{C.5})$$

Les facteurs d'échelles sont définis par :

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{C.6})$$

On a :

$$h_1 = |1 - \xi_3 \kappa_1|, \quad h_2 = |1 - \xi_3 \kappa_2|, \quad h_3 = 1 \quad (\text{C.7})$$

La base naturelle a le défaut de ne pas être normée. Pour éviter cet inconvénient, on introduit la base naturelle normée, dite encore base physique :

$$\left\{ \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\|\mathbf{g}_i\|} = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = \frac{\mathbf{g}^i}{\|\mathbf{g}^i\|} = \mathbf{g}^i h_i \right\} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}) \quad (\text{C.8})$$

On travaille avec les *composantes physiques* des vecteurs. Ces composantes vérifient :

$$\mathbf{u} = u(i) \tilde{\mathbf{g}}_i, \quad \text{avec} \quad u(i) = h_i u^i = \frac{u_i}{h_i} \quad (\text{C.9})$$

C.2 Variations de la base naturelle

On peut écrire les dérivées des vecteurs de base sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{C.10})$$

où les nombres Γ_{ji}^i sont les coefficients de Christoffel. La définition des coefficients de Christoffel ainsi que leur calcul dans la base naturelle sont présentés dans l'annexe C.8. Pour alléger l'écriture, on notera la dérivée de ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} = \phi_{,j} \quad (\text{C.11})$$

Par abus de notation, même après le changement de variable (6.66), on notera :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \phi_{,3} \quad (\text{C.12})$$

C.3 Etude des champs surfaciques tangents

Pour les opérateurs de dérivation surfacique, les directions de différenciation appartiennent au plan tangent à l'interface (attention, ceci ne signifie pas que l'ensemble image de ces opérateurs appartient au plan tangent mais que l'on différencie uniquement suivant les directions tangentes à l'interface). Par souci de précision, les indices de cette partie sont notés avec des lettres grecques. Lorsque ces indices sont répétés, la sommation à effectuer se limite à deux termes et non trois comme dans le cas des champs volumiques. Pour plus de détail, on se reportera au chapitre 2 de l'ouvrage *Statique des coques élastiques* [32].

C.3.1 Gradient de surface d'un champ scalaire surfacique

Par définition, le gradient de surface, ∇_s , d'un champ scalaire surfacique, v , est :

$$\nabla_s v = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{t}^\alpha \quad (\text{C.13})$$

Si le champ scalaire v est défini dans tout l'espace, la relation suivante permet de relier le gradient volumique au gradient surfacique (voir [27]) :

$$\nabla v = \nabla_s v + (\mathbf{n} \cdot \nabla v) \mathbf{n} \quad (\text{C.14})$$

C.3.2 Gradient de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Le gradient de surface, ∇_s , d'un champ de vecteur tangent, \mathbf{V} , appliqué à la différentielle du point courant de la surface donne la partie tangente de la différentielle de ce champ vectoriel \mathbf{V} . Ses composantes covariantes sont

$$(\nabla_s \mathbf{V})_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial \xi_\beta} - V_\gamma \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma \quad (\text{C.15})$$

où les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les coefficients de connexion riemannienne (voir section C.3.3 pour leur lien avec les coefficients de Christoffel).

C.3.3 Divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Par définition, la divergence de surface, $\nabla_s \cdot$, d'un champ vectoriel surfacique tangent, \mathbf{V} , est

$$\nabla_s \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial \xi_\alpha} + V^\beta \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \quad (\text{C.16})$$

où les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les coefficients de connexion riemannienne. Dans notre cas (*i.e.* le repère choisi suit les lignes de courbure), ils correspondent aux coefficients de Christoffel avec $\xi_3 = 0$ (voir annexe C.8).

C.3.4 Rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Le rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent est le scalaire défini par

$$rot_s \mathbf{V} = o^{\beta\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \xi_\beta} \quad (\text{C.17})$$

où \mathbf{o} est le tenseur d'orientation de surface. Il s'agit de l'opérateur qui à tout couple de vecteur surfacique tangent associe le produit mixte avec la normale :

$$\begin{aligned} \mathbf{o} : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées choisi qui suit les lignes de courbure, les composantes covariantes (mais c'est en fait indifférent ici) du tenseur d'orientation de surface sont simplement :

$$\mathbf{o}_{..} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Le rotationnel de surface est la composante normale du rotationnel classique. Si un champ vectoriel spatial \mathbf{x} est tel que sa restriction à sa surface coïncide avec le champ vectoriel tangent \mathbf{v} , alors on a :

$$\text{rot}_s \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{x}$$

C.3.5 Laplacien de surface d'un champ scalaire surfacique

Par définition, le laplacien de surface, Δ_s , d'un champ scalaire surfacique, v , est :

$$\Delta_s v = \nabla_s \cdot (\nabla_s v) \quad (\text{C.19})$$

Avec un paramétrage associé aux directions principales (ou lignes de courbures), on a sur la surface définie par $\xi_3 = 0$:

$$\Delta_s v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} \quad (\text{C.20})$$

C.4 Tenseur de courbure normale

Les composantes covariantes du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , sont :

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\beta} \quad (\text{C.21})$$

La définition précédente est très générale. En particulier, les directions 1 et 2 ne correspondent pas nécessairement aux directions principales contrairement à une grande partie de ce document. Dans le cas où ces directions correspondent aux directions principales, on a la relation suivante avec les coefficients de Christoffel : $b_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^3 \Big|_{\xi_3=0}$. Les valeurs propres de \mathbf{B} sont les courbures principales de la surface au point considéré. On les note $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}$ et $\kappa_2 = \frac{1}{R_2}$.

Ces invariants sont :

- la courbure moyenne, $\kappa = \text{Tr } \mathbf{B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,
- la courbure gaussienne, $H = \det \mathbf{B} = \frac{1}{R_1 R_2}$.

Comme \mathbf{n} et \mathbf{t}_α sont orthogonaux entre eux les composantes covariantes du tenseur de courbure s'écrivent aussi :

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\beta}$$

D'après la généralisation du gradient de surface aux vecteurs non tangents (équation C.24), la relation précédente s'écrit en coordonnées intrinsèques :

$$\mathbf{B} = -\nabla_s \mathbf{n} \quad (\text{C.22})$$

Comme l'opérateur divergence est la trace de l'opérateur gradient, on retrouve :

$$\kappa = \text{Tr } \mathbf{B} = -\text{Tr } (\nabla_s \mathbf{n}) = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$$

C.5 Opérateurs de dérivation surfaciques

L'étude des champs surfaciques tangents nous a conduit à définir des opérateurs de dérivation surfacique. Les définitions de ces opérateurs peuvent être généralisées afin de pouvoir s'appliquer aux champs volumiques¹ non tangents². Afin de faire le lien entre les opérateurs surfaciques et les opérateurs classiques pour des tenseurs définis en volume (et non uniquement sur la surface), on définit l'opérateur de projection \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{C.23})$$

où \mathbf{I} est l'opérateur identité et \mathbf{n} la normale.

C.5.1 Opérateur gradient surfacique

Le gradient surfacique du tenseur \mathbf{T} (défini sur tout le volume et non uniquement sur la surface) est :

$$\nabla_s \mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{T} \quad (\text{C.24})$$

Cette relation permet de montrer le lien entre le gradient de surface d'un champ vectoriel et le gradient de surface de ses composantes dans la base canonique fixe. En effet, en se plaçant dans la base canonique fixe, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, on trouve la même relation que pour le gradient classique :

$$\nabla_s \mathbf{V} = \nabla_s V_x \otimes \mathbf{e}_x + \nabla_s V_y \otimes \mathbf{e}_y + \nabla_s V_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (\text{C.25})$$

C.5.2 Opérateur divergence surfacique

La divergence surfacique du tenseur \mathbf{T} (défini sur tout le volume et non uniquement sur la surface) est :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{T} = \mathbf{P} : \nabla \mathbf{T} \quad (\text{C.26})$$

C.5.3 Opérateur laplacien surfacique

La relation (C.19) donnée pour un scalaire s'étend en fait à un tenseur, \mathbf{T} , de dimension arbitraire :

$$\Delta_s \mathbf{T} = \nabla_s \cdot (\nabla_s \mathbf{T}) \quad (\text{C.27})$$

¹Les champs volumiques sont définis sur tout le domaine contrairement aux champs surfaciques qui ne sont définis que sur la surface.

²Les champs non tangents peuvent avoir une composante normale non nulle contrairement aux champs tangents.

En utilisant les équations (C.24) et (C.26) dans cette dernière relation, on trouve :

$$\Delta_s \mathbf{T} = \mathbf{P} : \nabla(\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{T}) \quad (\text{C.28})$$

Tout comme pour l'opérateur gradient surfacique, on peut alors faire le lien entre le laplacien surfacique d'un champ vectoriel et le laplacien surfacique de ses composantes dans la base canonique fixe, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On trouve la même relation que pour le laplacien *classique* :

$$\Delta_s \mathbf{V} = \Delta_s V_x \mathbf{e}_x + \Delta_s V_y \mathbf{e}_y + \Delta_s V_z \mathbf{e}_z \quad (\text{C.29})$$

C.6 Opérateur gradient

C.6.1 Gradient d'un scalaire

Le gradient de ψ s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2] :

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}_i \quad (\text{C.30})$$

Et on a :

$$\nabla \psi \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \quad (\text{C.31})$$

C.6.2 Gradient d'un vecteur

Le gradient d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2]

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{,i}^j + u^k \Gamma_{ki}^j \right) \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^i \quad (\text{C.32a})$$

ou encore, avec un autre choix de composantes :

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{j,i} - u_k \Gamma_{ji}^k \right) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (\text{C.32b})$$

On a alors

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = h_i u(i)_{,j} + u(i) h_{i,j} - h_k u(k) \Gamma_{ij}^k \quad (\text{C.32c})$$

soit pour chaque composante :

$$(\nabla \mathbf{u})_{11} = h_1 u(1)_{,1} - u(2) \xi_3 \frac{h_1}{h_2} \kappa_{1,1} - u(3) h_1 \kappa_1 \quad (\text{C.32d})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{12} = h_1 u(1)_{,2} - u(2) \xi_3 \kappa_{2,1} \quad (\text{C.32e})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{13} = h_1 u(1)_{,3} \quad (\text{C.32f})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{21} = h_2 u(2)_{,1} + u(1) \xi_3 \kappa_{1,2} \quad (\text{C.32g})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{22} = h_2 u(2)_{,2} - u(1) \xi_3 \frac{h_2}{h_1} \kappa_{2,2} - u(3) h_2 \kappa_2 \quad (\text{C.32h})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{23} = h_2 u(2)_{,3} \quad (\text{C.32i})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{31} = u(3)_{,1} + u(1) \kappa_1 \quad (\text{C.32j})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{32} = u(3)_{,2} + u(2) \kappa_2 \quad (\text{C.32k})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{33} = u(3)_{,3} \quad (\text{C.32l})$$

C.6.3 Composante normale du tenseur des contraintes visqueuses

On déduit de l'équation (C.32a) que le gradient du vecteur \mathbf{u} contracté avec le vecteur normal à l'interface s'écrit,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = u^j_{,3} \mathbf{g}_j + u^1 \Gamma_{13}^1 \mathbf{g}_1 + u^2 \Gamma_{23}^2 \mathbf{g}_2 \quad (\text{C.33})$$

car dans l'expression (C.32a) Γ_{k3}^j est non nul uniquement pour Γ_{13}^1 et Γ_{23}^2 (voir annexe C.8). Cependant, en utilisant les composantes contravariantes physiques des vecteurs, et en exprimant le résultat dans la base naturelle normée, il reste simplement :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = u(j)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_j \quad (\text{C.34})$$

On déduit des équations (C.32j), (C.32k) et (C.32l) que le gradient transposé du vecteur \mathbf{u} contracté avec le vecteur normal à l'interface s'écrit :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla^T \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})_{3i} \mathbf{g}^i = \frac{u(3)_{,1} + u(1)\kappa_1}{h_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 + \frac{u(3)_{,2} + u(2)\kappa_2}{h_2} \tilde{\mathbf{g}}_2 + u(3)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_3 \quad (\text{C.35})$$

Finalement,

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \left(u(1)_{,3} + \frac{u(3)_{,1} + u(1)\kappa_1}{h_1} \right) \tilde{\mathbf{g}}_1 + \left(u(2)_{,3} + \frac{u(3)_{,2} + u(2)\kappa_2}{h_2} \right) \tilde{\mathbf{g}}_2 + 2u(3)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_3 \quad (\text{C.36})$$

C.7 Opérateur divergence

C.7.1 Divergence d'un vecteur

Par définition, la divergence d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}^i \quad (\text{C.37})$$

En écrivant le vecteur \mathbf{u} sous forme contravariante et en utilisant la relation (C.10) sur la dérivée des vecteurs de base, il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u^i_{,i} + u^j \Gamma_{ji}^i \quad (\text{C.38})$$

Comme certains Γ_{ji}^i sont nuls (voir annexe C.8), il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u^2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u^3}{\partial \xi_3} + u^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + u^2(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2) + u^3(\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) \quad (\text{C.39})$$

En utilisant les composantes contravariantes physiques des vecteurs et les expressions des coefficients de Christoffel, on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial u(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial u(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_3} - u(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) - \xi_3 \left(u(1) \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + u(2) \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \right) \right] \quad (\text{C.40})$$

C.7.2 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

On pose :

$$\mathbf{S} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (\text{C.41})$$

La divergence de ce tenseur d'ordre 2 s'écrit [33, Chap. 2] :

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})_i = (\nabla \mathbf{S})_{ikk} = S_{ik,k} - S_{mk} \Gamma_{ki}^m - S_{im} \Gamma_{kk}^m \quad (\text{C.42})$$

Le triple indice un peu barbare, ikk , vient juste du fait que le gradient d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 3. On n'utilisera cette formule que dans un voisinage de l'interface, c'est-à-dire pour ξ_3 proche de zéro. Plus précisément, on va réaliser un développement limité en ϵ avec $\xi_3 = \epsilon \xi$. Pour notre étude, seuls les termes en ϵ^{-2} , en ϵ^{-1} et d'ordre 0 en ϵ sont nécessaires. En explicitant uniquement les termes qui seront non nuls jusqu'à l'ordre 0 en ϵ une fois le changement de variable $\xi_3 = \epsilon \xi$ réalisé, on a :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_1 &= 2(\mu u(1),1),1 + (\mu u(1),2),2 + (\mu u(2),1),2 + (\mu u(1),3),3 + (\mu u(3),1),3 \\ &\quad + \kappa_1 \left((\mu u(1)),3 - \mu u(1),3 - 2\mu u(3),1 - \xi_3 (\mu u(1),3),3 \right) \\ &\quad - \mu(\kappa_1 + \kappa_2) (u(3),1 + u(1),3 + \kappa_1 u(1) - \xi_3 \kappa_2 u(1),3) \\ &\quad + 4\mu \kappa_1^2 \xi_3 u(1),3 - 2\mu \kappa_{1,1} u(3) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43a})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_2 &= 2(\mu u(2),2),2 + (\mu u(1),2),2 + (\mu u(2),1),2 + (\mu u(2),3),3 + (\mu u(3),2),3 \\ &\quad + \kappa_2 \left((\mu u(2)),3 - \mu u(2),3 - 2\mu u(3),2 - \xi_3 (\mu u(2),3),3 \right) \\ &\quad - \mu(\kappa_1 + \kappa_2) (u(3),2 + u(1),3 + \kappa_2 u(2) - \xi_3 \kappa_1 u(2),3) \\ &\quad + 4\mu \kappa_2^2 \xi_3 u(2),3 - 2\mu \kappa_{2,2} u(3) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43b})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_3 &= 2(\mu u(3),3),3 + (\mu u(1),3),1 + (\mu u(3),1),1 + (\mu u(2),3),2 + (\mu u(3),2),2 \\ &\quad + \kappa_1 \left((\mu u(1)),1 - 2\mu u(3),3 - \xi_3 (\mu u(1),3),1 - \mu u(3) \kappa_1 \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left((\mu u(2)),2 - 2\mu u(3),3 - \xi_3 (\mu u(2),3),2 - \mu u(3) \kappa_2 \right) \\ &\quad + \mu \xi_3 ((\kappa_{1,1} - \kappa_{2,2})(u(1),3 - u(2),3) + 2u(3),3(\kappa_1 + \kappa_2)) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43c})$$

C.8 Coefficients de Christoffel

Par définition [33] :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{C.44})$$

On a également les deux relations [33] :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{C.45})$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\mu} (g_{j\mu,i} + g_{i\mu,j} - g_{ij,\mu}) \quad (\text{C.46})$$

Pour le système de coordonnées associées à l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , les coefficients de Christoffel qui sont non nuls sont :

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{-\kappa_1}{h_1} \quad (\text{C.47a})$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{-\kappa_2}{h_2} \quad (\text{C.47b})$$

$$\Gamma_{11}^3 = \kappa_1 h_1 \quad , \quad \Gamma_{22}^3 = \kappa_2 h_2 \quad (\text{C.47c})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47d})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} \quad (\text{C.47e})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47f})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \xi_3 \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = \xi_3 \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47g})$$

C.9 Élément de volume

Par définition [33], l'élément de volume, dV , s'écrit :

$$dV = \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.48a})$$

$$g = \det(g_{..}) \quad (\text{C.48b})$$

Dans le système de coordonnées associées à l'interface, $g_{..}$ est diagonal et, d'après les relations (C.7), l'équation (C.48a) devient :

$$dV = |1 - \xi_3 \kappa_1| |1 - \xi_3 \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.49})$$

On a déjà posé (section C.4) :

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 \quad (\text{C.50})$$

$$H = \kappa_1 \kappa_2 \quad (\text{C.51})$$

Si on suppose la surface suffisamment isotrope pour que l'approximation $\kappa_1 \approx \kappa_2$ soit valide, l'élément de volume devient :

$$dV = \left(1 - \frac{1}{2} \xi_3 \kappa\right)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.52})$$

C.10 Théorème de la divergence surfacique

Le théorème de la divergence surfacique s'écrit pour un tenseur, \mathbf{T} , quelconque³

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = \oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl - \int_S \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \quad (\text{C.53})$$

où κ est la courbure moyenne de la surface S , \mathbf{n} la normale à la surface S et $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur tangent à la surface S et normal au contour C (voir par exemple [23, eq. 3.3-7 p. 51] et la figure C.1). Ce théorème peut aussi s'écrire en utilisant le projecteur \mathbf{P} défini par l'équation (C.23) :

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl = \int_S \nabla_s \cdot (\mathbf{P}\mathbf{T}) dS \quad (\text{C.54})$$

³La divergence de surface est définie pour un tenseur, \mathbf{T} , quelconque (le tenseur peut en particulier être volumique et non tangent, voir paragraphe C.5).

Ces deux écritures sont bien sûr équivalentes car, par définition de la courbure et de la divergence surfacique (voir respectivement les paragraphes C.4 et C.5), on a :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{P} = \kappa \mathbf{n} \quad (\text{C.55})$$

On peut ensuite particulariser ce théorème. Si on suppose que le tenseur, \mathbf{T} , est un tenseur surfacique tangent ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$), on a :

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = \oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl \quad (\text{C.56})$$

Cette expression est similaire à la formule de Green $\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS$. Elle permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de contour (la formule de Green permet de transformer une intégrale de volume en intégrale de surface). Si, de plus, la surface, S , est fermée, il n'y a pas de contour, C et donc :

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = 0 \quad (\text{C.57})$$

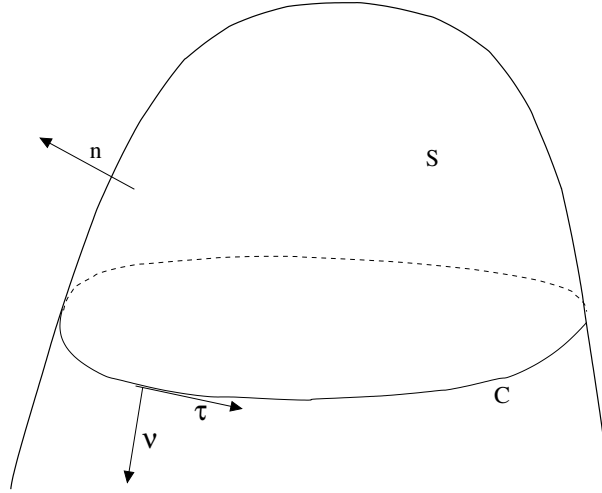


FIG. C.1 – Représentation d'un élément de surface, S , et de la courbe, C qui la limite. Le vecteur \mathbf{n} est la normale à la surface S (pour nous, cette surface est toujours une interface entre deux fluides de masse volumique différente, on oriente la normale du fluide le plus léger vers le plus lourd). Les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont contenus dans le plan tangent à la surface S . Le vecteur $\boldsymbol{\nu}$ (respectivement $\boldsymbol{\tau}$) est normal (respectivement tangent) à la courbe C . Les directions de ces trois vecteurs unitaires sont telles que $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$ forme un trièdre direct.

C.11 Conclusion

Dans cette annexe, nous avons défini les opérateurs de dérivation surfaciques puis nous avons calculé les opérateurs gradient et divergent dans le système de coordonnées associées à l'interface. Ces calculs sont utilisés pour déterminer les conditions de saut des grandeurs filtrées dans le chapitre 6. On a aussi précisé l'écriture de l'élément de volume dans ce système de coordonnées. Enfin, nous avons énoncé le théorème de la divergence surfacique.

Evolution de la courbure

DANS LE CHAPITRE 6, on cherche à établir l'équation de transport de la discontinuité équivalente. Or, nous avons vu (paragraphe 5.9) que, pour être conservatif en masse lorsque l'on définit la discontinuité équivalente d'une zone volumique de transition, il faut tenir compte de la courbure à l'interface. Par conséquent, il nous faut trouver l'équation d'évolution de la courbure. On l'établit dans cette annexe en prenant soin de vérifier l'invariance galiléenne : la courbure d'une interface translatée doit rester constante.

D.1 Démonstration

La démonstration présentée ici est une variante de celle du chapitre 17.2.1 de l'ouvrage *Theory of Multicomponent Fluids* [19]. Nous la détaillons afin de faciliter l'interprétation du résultat final qui fait intervenir le laplacien de surface d'un champ scalaire surfacique. L'interface est définie par la fonction vectorielle \mathbf{x} qui a tout instant associée à chaque couple de coordonnées de surface (ξ_1, ξ_2) (voir annexe C) la position spatiale du point de l'interface correspondant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2, t) &\mapsto \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, t) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Par définition, la vitesse de l'interface est :

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (\text{D.2})$$

La dérivée temporelle de la relation précédente (D.2) ainsi que toutes celles de cette annexe est une dérivée particulaire ou lagrangienne dans la mesure où on différencie par rapport au temps en suivant un point de la surface (*i.e.* à (ξ_1, ξ_2) fixé). Le déplacement géométrique de l'interface ne dépend que de la composante normale de la vitesse \mathbf{v} . Par conséquent, on suppose sans perte de généralité que

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, t) = v(\xi_1, \xi_2, t)\mathbf{n}(\xi_1, \xi_2, t) \quad (\text{D.3})$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface. De plus, on suppose que la paramétrisation est telle que chaque point \mathbf{x} sur la surface au temps t , paramétrisé par (ξ_1, ξ_2) , se déplace suivant la direction

normale à la surface. On suppose que non seulement la surface mais aussi la paramétrisation sont transportées suivant la direction normale. Ceci implique que la paramétrisation ne correspond pas nécessairement au déplacement d'un quelconque point matériel. En accord avec les notations de l'annexe C, on note \mathbf{t}_α ($\alpha = 1$ ou 2) les tangentes dans les directions principales à l'interface, on a en $\xi_3 = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.4a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = -\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.4b})$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{n} \quad (\text{D.4c})$$

En combinant (D.4a) et (D.4b), on trouve

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} = -R_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.5})$$

où $R_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, sont les rayons de courbure principaux. Cette relation est cohérente avec l'expression des coefficients de Christoffel (Annexe C.8). Il est important de noter que la convention de signe des annexes C, C.8 et C.9 (et donc dans celle-ci) est telle que $\kappa = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$. En différenciant (D.5) par rapport au temps en suivant un point de la surface, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{D.6a})$$

pour le membre de gauche et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-R_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \right) = -\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} - R_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{D.6b})$$

pour le membre de droite, ainsi,

$$-\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} - R_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.6c})$$

Comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{D.7a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{D.7b})$$

Ainsi, en faisant le produit scalaire de $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}$ avec (D.6c), on trouve :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v - R_\alpha \frac{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}}{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}} \quad (\text{D.8})$$

On va simplifier la fraction de cette expression. D'après (D.4b) et (D.4c), on a les égalités

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha^2} \quad (\text{D.9a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} &= -\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) - \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9b})$$

où le passage des deux dernières lignes utilise la relation (D.7b). En remplaçant les deux produits scalaires de l'équation (D.8) par leurs expressions simplifiées (D.9), elle devient :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v + R_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \quad (\text{D.10})$$

En différenciant (D.2) par rapport à une des deux directions principales de la surface, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha \partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \quad (\text{D.11})$$

Comme d'après (D.3) on a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{D.12})$$

le produit scalaire par \mathbf{n} de la relation (D.11) fournit

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{D.13})$$

En remarquant que $\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ implique

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.14})$$

on a

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}_\alpha = -\frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.15})$$

L'utilisation de cette dernière relation (D.15) dans (D.10) donne :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v - R_\alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_\alpha^2} \quad (\text{D.16})$$

En posant comme dans l'annexe (C.9)

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{D.17a})$$

$$H = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (\text{D.17b})$$

on remarque que

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \quad (\text{D.18a})$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \quad (\text{D.18b})$$

où on a choisi $R_1 \leq R_2$. En différenciant (D.17a) et (D.17b) par rapport au temps et en éliminant R_1 et R_2 grâce à (D.18a) et (D.18b), nous obtenons

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = (\kappa^2 - 2H)v + \Delta_s v \quad (\text{D.19a})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa H v + \frac{\kappa}{2} \Delta_s v + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} \right) \quad (\text{D.19b})$$

où Δ_s désigne le laplacien de surface défini par la relation (C.20) de l'annexe C. On peut réécrire l'évolution de la courbure gaussienne (D.19b) en coordonnées intrinsèques (*i.e.* formulation tensorielle indépendante du choix d'une base de projection) à partir du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , (voir section C.4) et du gradient de surface, ∇_s , (voir section C.3.2) du gradient de surface du scalaire v

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa H v + (\kappa \mathbf{P} - \mathbf{B}) : \nabla_s (\nabla_s v) \quad (\text{D.20})$$

où \mathbf{P} représente le projecteur dans le plan tangent à la surface défini par l'équation (C.23) et l'opérateur ":" une double contraction. Si on suppose que $\frac{\kappa}{2} \approx \frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2}$, les relations (D.19) se limitent à la seule équation :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\kappa^2}{2} v + \Delta_s v \quad (\text{D.21})$$

D.2 Illustration

La formule (D.16) s'illustre sur des cas très simples (voir figure D.1). Le premier terme du membre de droite correspond à une dilatation : si on soumet une bulle sphérique de rayon R_0 à $t = 0$ à un champ de vitesse normale constant et égal à $-V$, son rayon est $R_0 + Vt$ à l'instant t . Le second terme correspond à la courbure du profil de vitesse normale. Ainsi, plus ce profil est courbe est plus le rayon de courbure diminue.

D.3 Formulation mettant en évidence l'invariance galiléenne

La formule D.16 a été établie en ne considérant qu'un déplacement normal. Par conséquent, la dérivée temporelle de cette équation est associée à ce paramétrage. En particulier, elle est différente de la dérivée lagrangienne et elle n'est donc pas nécessairement nulle pour un champ de vitesse constant et uniforme. Classiquement, on est habitué à relier la dérivée lagrangienne (ou dérivée particulaire, noté $\frac{D\circ}{Dt}$) à la dérivée eulérienne, noté $\frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$. En appelant \mathbf{u} , le champ de vitesse sous-jacent, le lien entre ces dérivées est :

$$\frac{D\circ}{Dt} = \frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\circ} \quad (\text{D.22})$$

La figure D.2 montre que le même raisonnement entre les points A' et A'' (au lieu de A et A'') pour le lien entre dérivée lagrangienne et eulérienne conduit à

$$\frac{D\circ}{Dt} = \frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \cdot \nabla_s \circ \quad (\text{D.23})$$

où \mathbf{P} est le projecteur défini par l'équation (C.23). L'application de (D.23) à un des rayons

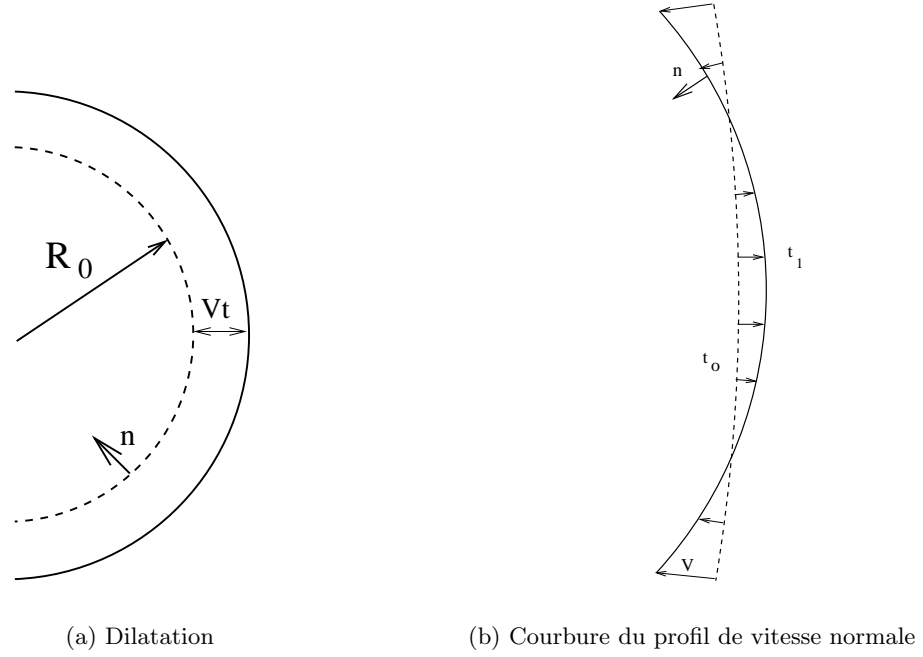


FIG. D.1 – Evolution du rayon

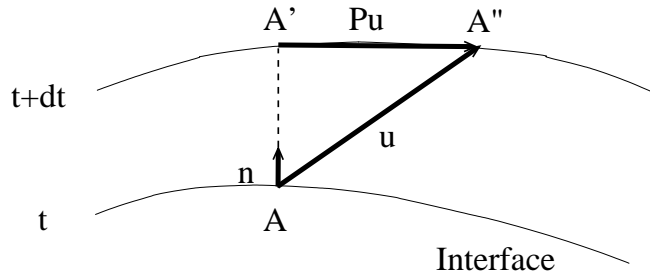


FIG. D.2 – Lien entre dérivée lagrangienne et la dérivée associée au paramétrage normal

de courbure donne :

$$\frac{DR_\alpha}{Dt} = \frac{\partial R_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{DR_\alpha}{Dt} &= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - R_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \\ &= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - R_\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \end{aligned}$$

Or, d'après D.5, la dérivée de la normale s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(-\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \right) = -\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{n} + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{t}_\alpha$$

Ainsi, après élimination de certains termes :

$$\frac{DR_\alpha}{Dt} = -R_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{n} + 2R_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.24})$$

Cette dernière équation vérifie trivialement $\frac{DR_\alpha}{Dt} = 0$ pour un champ de vitesse constant en espace. En combinant les équations des deux rayons principaux, on trouve pour la courbure :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_2^2} \right) \cdot \mathbf{n} - 2 \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{t}_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{t}_2 \right) \quad (\text{D.25})$$

Les relations (C.29) et (C.20) impliquent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_2^2} = \Delta_s \mathbf{u} \quad (\text{D.26})$$

On propose de calculer $\nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B}$. On rappelle que par définition, le tenseur de courbure \mathbf{B} s'écrit :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_1} \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \frac{1}{R_2} \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \quad (\text{D.27})$$

La relation (C.25) se réécrit :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} &= \nabla_s u_x \otimes [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \nabla_s u_y \otimes [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \nabla_s u_z \otimes [(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \\ &= \left[\frac{\partial u_x}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_x}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \left[\frac{\partial u_y}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_y}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \left[\frac{\partial u_z}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_z}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Les équations (D.27) et (D.28) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B} &= \frac{1}{R_1} \left((\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_x}{\partial \xi_1} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_y}{\partial \xi_1} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_z}{\partial \xi_1} \right) + \\ &\quad \frac{1}{R_2} \left((\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_x}{\partial \xi_2} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_y}{\partial \xi_2} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_z}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

On reconnaît alors le deuxième terme du membre de droite de (D.25). Finalement, en remplaçant (D.26) et (D.29) dans (D.25), on a en coordonnées intrinsèques :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \Delta_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - 2 \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B} \quad (\text{D.30})$$

Cette dernière écriture vérifie trivialement que $\frac{D\kappa}{Dt} = 0$ dès que la vitesse, \mathbf{u} , est constante.

D.4 Conclusion

Dans le chapitre 5, on montre que la fonction indicatrice de phase filtrée dépend de la courbure de l'interface. Pour établir l'équation de transport de la discontinuité équivalente (chapitre 6), on a donc besoin de l'équation d'évolution temporelle de la courbure que nous avons déterminée et interprétée dans cette annexe. En particulier, nous avons vu que l'on peut décomposer l'évolution de la géométrie de l'interface en un phénomène de dilatation (fig. D.1(a)) et un phénomène dû à la courbure du profil de vitesse (fig. D.1(b)).

Discrétisation des opérateurs de différentiation surfacique

DANS LE BUT d'évaluer l'efficacité des modèles que nous avons développés dans le cadre de la SGE discontinue (voir chapitre 6), il a été nécessaire de discrétiser certains des opérateurs de différentiation surfacique présentés dans le paragraphe C.3 de l'annexe C. Plus précisément, nos modèles nécessitent de savoir estimer le tenseur de courbure normale, le gradient surfacique et le laplacien surfacique. La discrétisation de ces opérateurs constitue une des difficultés majeures dans l'évaluation de nos modèles. L'objectif de cette annexe est d'expliquer cette difficulté et de proposer des solutions afin d'implémenter les modèles que nous proposons. Dans cette annexe, on s'appuie essentiellement sur le travail de thèse de Debunne [16]. On adapte les résultats obtenus pour les opérateurs de dérivation classiques à la discrétisation des opérateurs de dérivation surfaciques.

E.1 Le théorème de Gauss

On considère le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) associé à une base canonique fixe et le système de coordonnées généralisées associées à l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (voir annexe C). Le théorème de Gauss permet de réduire le calcul d'une intégrale sur un volume à celui d'une intégrale sur la surface du volume,

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} s n_i dS \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{E.1})$$

où s est un champ scalaire et \mathbf{n} la normale à la surface d'intégration ∂V , frontière de V . Puisque la surface des inclusions est discrétisée par des triangles, les vecteurs de la base associée à l'interface sont constants sur ces triangles. On peut appliquer le théorème précédent sur chacun de ces triangles, T , en se plaçant dans la restriction de l'espace définie par le plan du triangle T

$$\int_T \frac{\partial s}{\partial \xi_\alpha} dS = \int_{\partial T} s \nu_\alpha dL \quad \text{pour } \alpha = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{E.2})$$

où s est un champ scalaire surfacique et $\boldsymbol{\nu}$ la normale au contour d'intégration ∂T , frontière de T . La normale précédente appartient bien sûr au plan tangent à la surface car elle est dans la restriction de l'espace dans laquelle nous nous sommes placés : le plan défini par le triangle T .

Puisque les opérateurs de dérivation surfacique sont définis à partir de l'opération élémentaire de la dérivation d'un scalaire suivant une direction tangente, la formule précédente permet de les écrire sous la forme d'une intégrale de contour. Le principe des calculs qui vont suivre est d'appliquer l'équivalent surfacique du théorème de Gauss à de petites régions de l'espace qui entoure le point où on veut estimer la dérivée. On va supposer cette portion de l'interface suffisamment petite pour y considérer les dérivées $\frac{\partial s}{\partial \xi_\alpha}$ comme constantes et pouvant donc être extraite de l'intégrale de surface. L'intégrale de contour pourra quant à elle être évaluée en faisant des hypothèses sur la forme du champ considéré.

E.2 Région de Voronoï

Une des surfaces sur laquelle nous allons appliquer le théorème de Gauss est définie comme étant la région de Voronoï associée à chaque marqueur lagrangien (*i.e.* les sommets des triangles T du paragraphe précédent). Cette région est celle contenant les points de l'espace qui sont plus proches du marqueur considéré que d'aucun autre marqueur (voir fig. E.1). C'est donc la zone la plus à même d'être représentée par la particule. Ces régions s'adaptent naturellement à la disposition des marqueurs lagrangiens, leur union couvrant tout l'espace et donnant à chaque particule une importance adéquate.

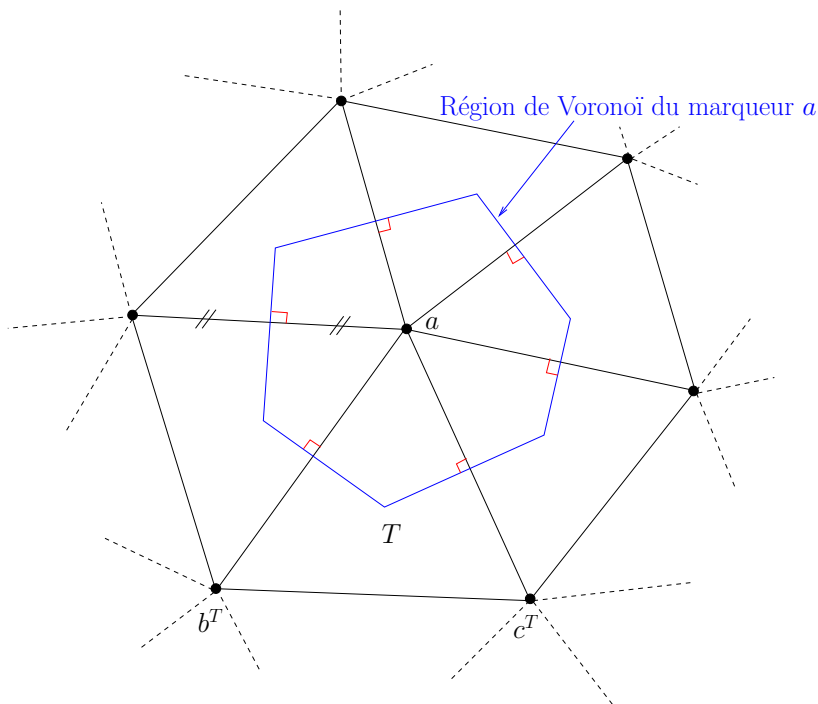


FIG. E.1 – Définition de la région de Voronoï

E.3 Discrétisation du gradient surfacique

On suppose que le champ scalaire v est discrétisé aux sommets des triangles T . On dispose donc de trois valeurs pour chaque triangle et il est naturel de supposer le gradient surfacique du champ s constant par triangle. En appliquant la formule E.2 sur le triangle de sommets a , b et c , on trouve le résultat classique des éléments finis lorsqu'on prend les fonctions chapeaux

comme fonctions de base

$$(\nabla_s v)_T = \frac{1}{2|T|} (v_a a \mathbf{n}_a + v_b b \mathbf{n}_b + v_c c \mathbf{n}_c) \quad (\text{E.3})$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T , v_a (respectivement v_b et v_c) correspond à la valeur de v au sommet a (respectivement b et c), \mathbf{n}_a représente la normale unitaire à l'arête bc entrante dans le triangle (abc) et appartenant au plan défini par ce triangle, enfin, a est égale à la longueur de l'arête bc . Les définitions précédentes sont illustrées par la figure E.2. Pour estimer le gradient surfacique au marqueur lagrangien m (sommet des triangles T), on fait la moyenne, pondérée par l'aire de la région de Voronoï, des gradients surfaciques de tous les triangles dont un des sommets est le marqueur m

$$(\nabla_s v)_m = \frac{\sum_T A_T^m (\nabla_s v)_T}{\sum_T A_T^m} \quad (\text{E.4})$$

où A_T^m est l'aire de l'intersection entre la région de Voronoï du marqueur m et du triangle T .

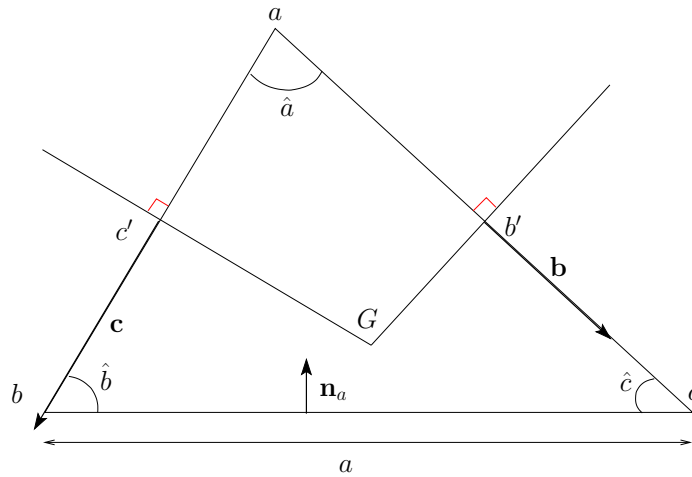


FIG. E.2 – Notations géométriques d'un triangle T

E.4 Discrétisation du tenseur de courbure

Pour discrétiser le tenseur de courbure, nous avons d'abord recherché ce qui existait dans la littérature. Nous avons trouvé des travaux récents qui utilisent les directions principales (vecteurs propres des valeurs propres non nulles du tenseur de courbure) pour optimiser des techniques de remaillage [15]. On y trouve une formule robuste pour estimer le tenseur de courbure qui possède des propriétés de convergence en maillage et qui est relativement simple à implémenter. Cependant, pour des raisons de cohérence entre la façon de calculer les différents termes qui tiennent compte de la variation de la courbure, nous n'avons finalement pas utilisé ce résultat. Nous sommes revenu à la définition du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , qui permet d'écrire (voir paragraphe C.4) :

$$\mathbf{B} = -\nabla_s \mathbf{n} \quad (\text{E.5})$$

Nous avons naturellement défini la normale discrète en chaque triangle comme la normale à ce triangle. Puisque l'on ne sait évaluer le gradient surfacique que pour les champs discrétisés aux marqueurs, on définit la normale en chaque marqueur m comme la moyenne, pondérée

par l'aire de la région de Voronoï, des normales de tous les triangles dont un des sommets est le marqueur m

$$(\nabla_s \mathbf{n})_m = \frac{\sum_T A_T^m (\nabla_s \mathbf{n})_T}{\sum_T A_T^m} \quad (\text{E.6})$$

A partir de cette normale discrétisée aux sommets, on trouve $(\nabla_s \mathbf{n})_T$ puis, en utilisant la définition (E.4), on calcule le tenseur de courbure normale en chaque sommet $(\nabla_s \mathbf{n})_m$. Le résultat obtenu est proche de celui que fournit la formule de Cohen-Steiner et Morvan [15]. De plus, on retrouve à peu près la valeur de la courbure moyenne ($\kappa = \text{Tr}(\mathbf{B})$) calculée par ailleurs par la méthode de Front-tracking pour l'évaluation des forces interfaciales. La figure E.3 trace les directions principales de la surface de la bulle. Elles correspondent aux vecteurs propres des valeurs propres non nulles du tenseur de courbure normale ou encore aux directions principales de la surface (*i.e.* les directions suivant lesquelles la courbure est minimale ou maximale).

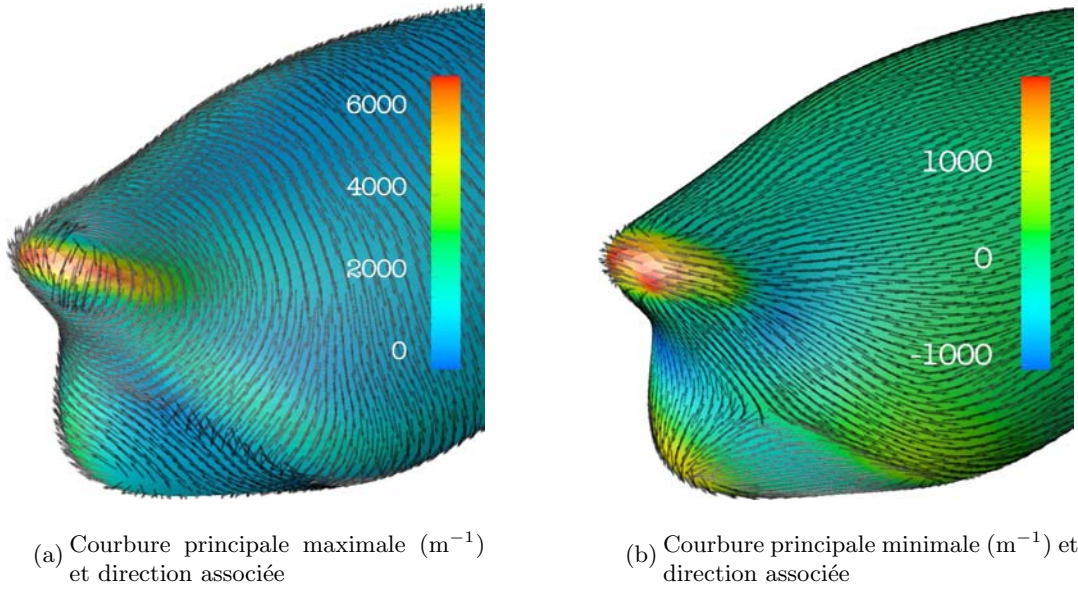


FIG. E.3 – Valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de courbure normale, $t = 200\Delta_t$

E.5 Discrétisation du laplacien surfacique

Tout comme le laplacien classique, le laplacien surfacique, Δ_s , correspond à la divergence du gradient (voir paragraphe C.3.5), en appliquant à $\nabla_s \cdot (\nabla_s v)$, sur une portion T de la surface S , le théorème de la divergence surfacique (voir paragraphe C.10) qui se déduit de l'égalité (E.2), on obtient

$$\int_T \Delta_s v dS = \int_T \nabla_s \cdot (\nabla_s v) dS = \int_{\partial T} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL \quad (\text{E.7})$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur surfacique normal du contour ∂T de la portion T . En supposant le laplacien constant sur la région de Voronoï du marqueur m , on trouve en appliquant la formule précédente sur cette région

$$(\Delta_s v)_m \sum_T A_T^m = \sum_T \int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL \quad (\text{E.8})$$

où ∂V_T^m est le contour de la région de Voronoï du marqueur m compris dans le triangle T . On suppose que le marqueur m correspond au sommet a du triangle T constitué des sommets a , b et c . En notant G le centre de gravité du triangle T , b' le milieu de l'arête ac et c' celui de l'arête ab , l'aire A_T^m est égale à :

$$A_T^m = \frac{1}{2}c'G \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2}b'G \cdot \frac{b}{2} \quad (\text{E.9})$$

En faisant apparaître les angles \hat{b} et \hat{c} , on trouve :

$$A_T^m = \frac{1}{8} \left(c^2 \cotan(\hat{c}) + b^2 \cotan(\hat{b}) \right) \quad (\text{E.10})$$

Puisque le gradient surfacique est constant sur chaque triangle T , en utilisant l'expression (E.3), son intégrale sur le contour de la région de Voronoï s'écrit :

$$\int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL = \frac{1}{2|T|} (v_a a \mathbf{n}_a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + v_b b \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{c} + v_c c \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{E.11})$$

où \mathbf{b} (respectivement \mathbf{c}) est le vecteur de norme $b'G$ (respectivement $c'G$) orienté suivant l'arête ac (respectivement ab) du sommet a vers le sommet c (respectivement b). Le vecteur \mathbf{b} (respectivement \mathbf{c}) est en fait normal à la droite ($b'G$) (respectivement $c'G$) et sortant de la région de Voronoï. On a donc, en introduisant comme précédemment les angles \hat{b} et \hat{c} :

$$\int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL = \frac{1}{2} \left(\cotan(\hat{c})(v_b - v_a) + \cotan(\hat{b})(v_c - v_a) \right) \quad (\text{E.12})$$

Finalement, en combinant les relations (E.8), (E.10) et (E.12), on a

$$(\Delta_s v)_m = 4 \frac{\sum_T \left(\cotan(\hat{c}^T)(v_b^T - v_a) + \cotan(\hat{b}^T)(v_c^T - v_a) \right)}{\sum_T \left((c^T)^2 \cotan(\hat{c}^T) + (b^T)^2 \cotan(\hat{b}^T) \right)} \quad (\text{E.13})$$

où l'exposant T rappelle que les grandeurs dépendent du triangle où l'on se trouve. Bien que l'on a considéré le champ \mathbf{u} comme localement linéaire, ce qui devrait normalement conduire à une dérivée seconde nulle, le fait d'en considérer la valeur comme une fonction par morceaux sur plusieurs triangles crée un laplacien non nul aux sommets.

E.6 Conclusion

Dans cette annexe, on a précisé comment calculer de façon cohérente le tenseur de courbure normale, le gradient et le laplacien surfaciques d'un scalaire. Puisque nos champs vectoriels sont exprimés dans la case canonique fixe, nous calculons leur dérivée composante par composante. Nous n'avons donc besoin que des formules pour les scalaires. Le travail résumé ici, nous a permis de tester *a priori* notre modélisation du transport de la discontinuité équivalente (voir paragraphe 6.6).

Méthode du simplexe

AFIN DE déterminer les coefficients souhaitables devant les modèles que nous avons développé dans le cadre de la SGE discontinue (voir chapitre 6), nous avons été amené à utiliser l'algorithme de minimisation du simplexe. Ce dernier est très rudimentaire mais extrêmement facile à implémenter. De plus, malgré un coût numérique relativement important, cet algorithme est robuste et efficace. Enfin, il est relativement intuitif à comprendre. L'objectif de cette annexe se limite à en présenter le principe. Pour se procurer les sources, ou consulter d'autres algorithmes de minimisation, on pourra consulter les Numerical Recipes.

F.1 Définition

Dans cette annexe, on présente l'algorithme de Nelder et Mead [70] à ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe en programmation linéaire. Un simplexe de dimension k est l'enveloppe convexe de $k+1$ vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ de \mathbb{R}^n , $k \leq n$, affinement indépendants, c'est-à-dire que les k vecteurs $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}$ sont linéairement indépendants. Par exemple, trois points non alignés dans \mathbb{R}^2 , ou quatre points non coplanaires dans \mathbb{R}^3 sont affinement indépendants, et définissent des simplexes de dimension 2 et 3, respectivement.

Lorsqu'on cherche à minimiser une fonction coût qui dépend de N variables, l'algorithme de Nelder et Mead travaille avec un simplexe de dimension N constitué de $N+1$ vecteurs de \mathbb{R}^N . Par rapport à la définition précédente on a donc $k = n = N$. Dans notre cas particulier, nous avons $N = 2$ car on cherche à minimiser l'erreur de notre modèle en fonction des coefficients devant l'hypothèse de similarités d'échelles et les termes qui tiennent compte de l'évolution de la courbure (voir paragraphe 6.6).

F.2 Description de la méthode

La méthode du simplexe est dite d'ordre 0 car elle nécessite uniquement d'évaluer la valeur de la fonction et aucune dérivée. L'algorithme de minimisation de Nelder-Mead est basé sur la comparaison des valeurs de la fonction dans les $(N+1)$ sommets d'un simplexe général. Le simplexe se modifie à travers les opérations de réflexion, d'expansion et de contraction,

en changeant le sommet avec la plus grande valeur de la fonction coût par un autre point de valeur plus petite. La figure F.1 illustre géométriquement pour un simplexe d'ordre 3 dans \mathbb{R}^3 les transformations possibles. La figure F.2 décrit l'algorithme de la méthode de Nelder et Mead. L'initialisation se fait en précisant $(N+1)$ sommets. La distance qui sépare les sommets doit être caractéristique du problème. Dans notre cas, on cherche à déterminer les paramètres de notre modèle et on s'attend à qu'ils soient proches de 1. On a donc choisi les trois sommets du type $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Le test de convergence consiste à vérifier la distance entre chaque couple de sommets. Nous avons fixé ce paramètre à 10^{-5} . Le nombre d'itérations pour notre problème était de l'ordre de la centaine.

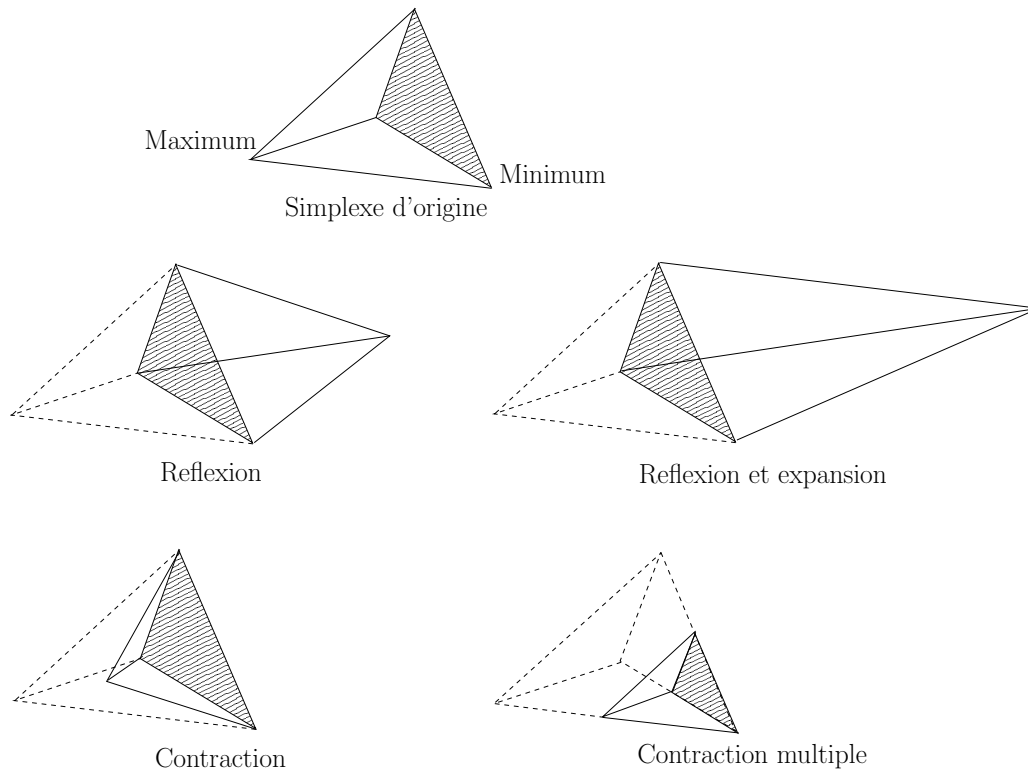


FIG. F.1 – Transformation possible au cours d'une étape de la méthode du simplexe.

F.3 Conclusion

La méthode du simplexe est relativement intuitive. Nous l'avons facilement mis en oeuvre afin de déterminer les coefficients de nos modèles dans l'équation de transport de l'interface filtrée discontinue (voir chapitre 6).

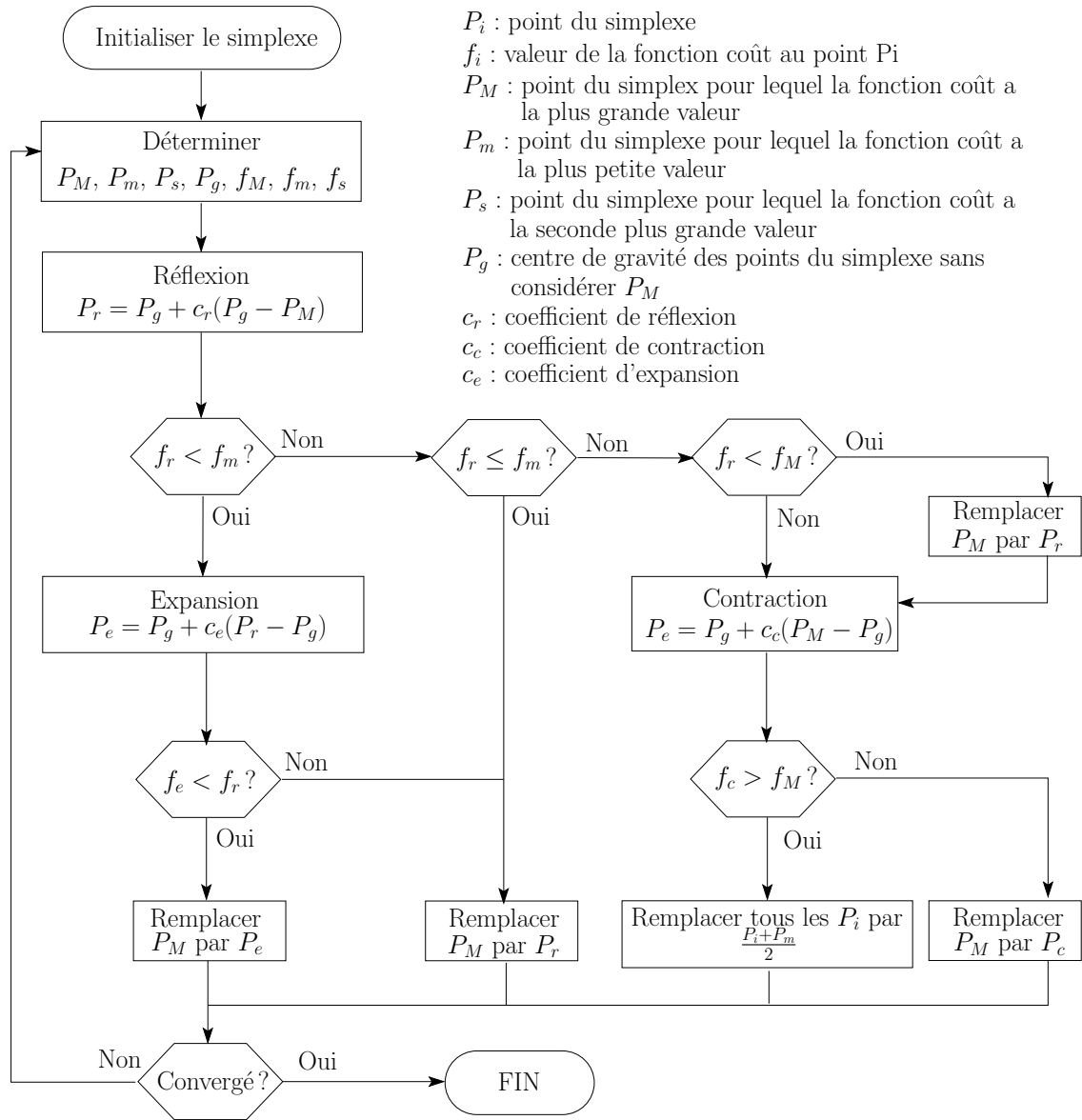


FIG. F.2 – Organigramme de la méthode de Nelder et Mead

Bibliographie

- [1] D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler. Diffuse-interface models in fluids mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30 : 139–165, 1998.
- [2] D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler. A phase-field model with convection: sharp-interface asymptotics. *Physica D*, 151 : 305–331, 2001.
- [3] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover, New York, 1962.
- [4] J. Bardina, J. H. Ferziger & W. C. Reynolds. Improved turbulence models for large eddy simulation. *AIAA Paper 83 - 1357*, 1983.
- [5] G. K. Batchelor. Transport properties of two-phase materials with random structure. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 6(1) : 227–255, 1974.
- [6] A. Benkenida. *Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor*. Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 1999.
- [7] M. Boivin, O. Simonin & K. D. Squires. On the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using large eddy simulation. *Phys. Fluids*, 12(8) : 2080–2090, 2000.
- [8] U. Brackbill, D.B. Kothe & C. Zemach. A continuum method for modelling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 : 335–354, 1992.
- [9] W.P. Breugem, B.J. Boersma & R.E. Uittenbogaard. The laminar boundary layer over a permeable wall. *Transport in Porous Media*, 59(3) : 267–300, 2005.
- [10] B. Bunner & G. Tryggvason. Effect on bubble deformation on the properties of bubbly flows. *J. Fluid Mech.*, 495 : 77–118, 2003.
- [11] I. Calmet & J. Magnaudet. Statistical structure of high-Reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *J. Fluid Mech.*, 474 : 355–378, 2003.
- [12] M. Chandesris & D. Jamet. Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 : 2137–2150, 2006.
- [13] G. Chanteperdrix. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. Thèse de Doctorat, ENSAE, 2004.
- [14] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cepadues-Editions, 2000.
- [15] D. Cohen-Steiner & J.-M. Morvan. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle. *ACM Symp. on Computational Geometry*, pages 312–321, 2003.

- [16] G. Debunne. *Animation multirésolution d'objets déformables en temps-réel, application à la simulation chirurgicale*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [17] J.M. Delhay. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 : 395–409, 1974.
- [18] D. A. Drew & R.T. Lahey. The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 13 : 113–121, 1987.
- [19] D.A. Drew & S.L. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [20] C. Duquennoy. *Développement d'une approche de simulation numérique directe de l'ébullition en paroi*. Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2000.
- [21] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
- [22] J. K. Eaton & J. R. Fessler. Preferential concentration of particles by turbulence. *Int. J. Multiphase Flow*, 16(1) : 169–209, 1994.
- [23] D.A. Edwards, H. Brenner & D.T. Wasan. *Interfacial Transport Processes and Rheology*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- [24] S. Elghobashi, T. Abou-Arab, M. Rizk & A. Mostafa. Prediction of the particle-laden jet with a two-equation turbulence model. *Int. J. Multiphase Flow*, 10(6) : 687–710, 1984.
- [25] J. L. Ericksen. Anisotropic fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4 : 231–237, 1960.
- [26] A. C. Eringen. *Continuum Physics*, volume 2. Academic Press, New York, 1975.
- [27] J. Fabre et D. Legendre. Cours "Ecoulements diphasiques" de l'ENSEEIH, mis à jour en 2000.
- [28] A. Favre, L. S. G. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio & M. Coantic. *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars, 1976.
- [29] R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman & S. Osher. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). *J. Comput. Phys.*, 152 : 457–492, 1999.
- [30] C. Fouillet. *Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la simulation numérique directe de l'ébullition nucléée*. Thèse de Doctorat, Univ. Paris 6, 2003.
- [31] M. Fulgosi, D. Lakehal, S. Banerjee & V. DE Angelis. Direct numerical simulation in a sheared air-water flow with a deformable interface. *J. Fluid Mech.*, 222 : 95–118, 1991.
- [32] J. Garrigues. Statique des coques élastiques. <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/coques.html>, 1999.
- [33] J. Garrigues. Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens. <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tenseurs.html>, 2001.
- [34] M. Germano. A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*, 29(7) : 2323–2324, 1986.

- [35] F. Gibou, R. P. Fedkiw, L.T. Cheng & M. Kang. A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 176 : 205–227, 2002.
- [36] F. Grinstein & C. Fureby. Recent progress on MILES for high Reynolds-number flows. *AIAA Paper 2002-0134*, 2002.
- [37] A. Henriques, P. Coste, S. Pigny & J. Magnaudet. Large Interface Simulation in multi-phase flow phenomena. *Proceedings of FEDSM2006*, pages 1–8, Miami (Florida), USA, 2006.
- [38] D. Homescu & P.K. Panday. Forced convection condensation on a horizontal tube: influence of turbulence in the vapor and liquid phases. *J. Heat Transfer*, 174 : 874–885, 1999.
- [39] K. Horiuti. The role of the Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 1(2) : 426–428, 1989.
- [40] M. Ishii. *Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow*. Eyrolles, 1975.
- [41] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, ECP, 1998.
- [42] H. S. Kang, S. Chester & C. Meneveau. Decaying turbulence in an active-grid generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 480 : 129–160, 2003.
- [43] M. Kang, R. Fedkiw & X.-D. Liu. A boundary condition capturing method for multi-phase incompressible flow. *J. Sci. Comput.*, 15 : 323–360, 2000.
- [44] I. Kataoka. Local instant formulation of two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 12 (5) : 745–758, 1986.
- [45] E. Labourasse. *Reconstruction des fluctuations turbulentes par une approche hybride RANS/SGE*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2002.
- [46] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J.P. Caltagirone & P. Sagaut. Towards Large Eddy Simulation of isothermal two-phase flows: governing equations and *a priori* tests. *Accepted for publication in Int. J. Multiphase Flow*, 2006.
- [47] E. Labourasse, A. Toutant & O. Lebaigue. Interface-turbulence interaction. *Proceedings of Int. Conf. Multiphase Flows - 2004*, 268, 2004.
- [48] B. Lafaurie, C. Nardonne, R. Scardovelli, S. Zaleski & G. Zanetti. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comp. Phys.*, 113 : 134–197, 1994.
- [49] S. Lain, D. Bröder, M. Sommerfeld & M. F. Göz. Modelling hydrodynamics and turbulence in a bubble column using the Euler-Lagrange procedure. *Int. J. Multiphase Flow*, 28(8) : 1381–1407, 2002.
- [50] D. Lakehal, B. L. Smith & M. Milelli. Large-eddy simulation of bubbly turbulent shear flows. *Journal of Turbulence*, 3 : 025, 2002.
- [51] H. Lamb. *Hydrodynamics (6th edition)*. Dover Pubns Publishers, 1932.

- [52] O. Lebaigue, D. Jamet, C. Duquennoy & N. Coutris. Review of existing methods for direct numerical simulation of liquid-vapor two-phase flows. *6th International Conference on Nuclear Engineering*, May 1998.
- [53] D. Legendre & J. Magnaudet. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 368 : 81–126, 1998.
- [54] D. Legendre, J. Magnaudet & G. Mougin. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 497 : 133–166, 2003.
- [55] H. Lemonnier & D. Jamet. Test-case No 5 : Oscillation of an inclusion immersed in a quiescent fluid. *Multiphase Science and Technology*, 16(1–3) : 31–38, 2004.
- [56] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. in Geophys. A*, 18 : 237–248, 1974.
- [57] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer eds., 1990.
- [58] S. Liu, C. Meneveau & J. Katz. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 275 : 83–119, 1994.
- [59] X.-D. Liu, R. P. Fedkiw & M. Kang. A boundary condition capturing method for Poisson’s equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 160 : 151–178, 2000.
- [60] T. Lundgren. Linearly forced isotropic turbulence. *Annual Research Briefs*, pages 461–473. Center for Turbulence Research, Stanford, 2003.
- [61] A. Maeda, A. Sou & A. Tomiyama. An hybrid method for simulating flows including fluid particles. *Proceedings of FEDSM2006*, pages 1–6, Miami (Florida), USA, 2006.
- [62] B. Mathieu. *Etude physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 2003.
- [63] B. Mathieu. Demonstration of a 3d parallel implementation of the Front-tracking method : Simulation of fluid mixing with a moving boundary and a free surface. *Proceedings of Advances in the Modeling Methodologies of Two-Phase Flows Meeting*, Lyon, France, 24-26 november 2004.
- [64] B. Maury. Characteristics ALE method for the unsteady 3d Navier-Stokes equations with a free surface. *Int. J. Comp. Fluid Dynamics*, 6 : 175–188, 1996.
- [65] S. Menon, P. K. Yeung & W. W. Kim. Effect of subgrid models on the computed interscale energy transfer in isotropic turbulence. *Computers & Fluids*, 25(2) : 165–180, 1996.
- [66] A. Merle, D. Legendre & J. Magnaudet. Forces on a high-Reynolds-number spherical bubble in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 532 : 53–62, 2005.
- [67] A. Michalke. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.*, 19 : 543–556, 1964.
- [68] P. Moin & K. Mahesh. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30 : 539–578, 1998.
- [69] P. M. Morse & H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.

- [70] J. A. Nelder & R. Mead. A simplex for function minimization. *Computer J.*, 7 : 308–313, 1965.
- [71] D. Q. Nguyen, R. P. Fedkiw & M. Kang. A boundary condition capturing method for incompressible flame discontinuities. *J. Comput. Phys.*, 172 : 71–98, 2001.
- [72] F. Nicoud & F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62 : 183–200, 1999.
- [73] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington D. C., 1980.
- [74] J. Piquet. *Turbulence Flows, Models and Physics*. Springer Verlag, 1999.
- [75] A. Prosperetti. Bubbles. *Physics of Fluids*, 16(6) : 1852–1865, 2004.
- [76] C. D. Pruett, J. S. Sochaki & N. A. Adams. On Taylor-series expansions of residual stresses. *Physics of Fluids*, 13(9) : 2578–2589, 2001.
- [77] W. J. Rider & D. B. Kothe. Reconstructing volume tracking. *J. Comp. Phys.*, 141 : 112–152, 1998.
- [78] F. Risso & J. Fabre. Oscillations and breakup of a bubble immersed in a turbulent field. *J. Fluid Mech.*, 372 : 323–355, 1998.
- [79] C. Rosales & C. Meneveau. Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : Physical space implementations and convergence properties. *Phys. Fluids*, 17 (095106) : 509–529, 2005.
- [80] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag, 2003.
- [81] P. Sagaut & M. Germano. On the filtering paradigm for LES flow with discontinuities. *Journal of Turbulence*, 6(23) : 1–9, 2005.
- [82] Y. Sato, M. Sadatomi & K. Sekoguchi. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 7 : 167–190, 1981.
- [83] Y. Sato & K. Sekoguchi. Liquid velocity distribution in two-phase bubble flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 2 : 79–95, 1975.
- [84] H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. Pergamon Press, London, 1968.
- [85] P. Seppacher. *Etude d'une modélisation des zones capillaires fluides : interfaces et lignes de contact*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1987.
- [86] P. Seppacher. Etude des conditions aux limites en théorie du second gradient : cas de la capillarité. *C. R. Acad. Sci., t. 309, série II*, pages 497–502, 1989.
- [87] J.A. Sethian. *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [88] L. Shen & D. K. P. Yue. Large-eddy simulation of free surface turbulence. *J. Fluid Mech.*, 440 : 75–116, 2001.
- [89] S. Shin, S.I. Abdel-Khalik, V. Daru & D. Juric. Accurate representation of surface tension using the level contour reconstruction method. *J. Comp. Phys.*, 203(2) : 493–516, 2005.
- [90] S. Shin & D. Juric. Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front-tracking without connectivity. *J. Comp. Phys.*, 180 (2) : 427–470, 2002.

- [91] G. F. Smith & R. S. Rivlin. The anisotropic tensors. *Quart. Appl. Math.*, 15 : 308–314, 1957.
- [92] K. D. Squires & H. Yamazaki. Preferential concentration of marine particles in isotropic turbulence. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers*, 42(11–12) : 1989–2004, 1995.
- [93] S. Stolz, N. A. Adams & L. Kleiser. The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent. *Direct and Large Eddy Simulation III*, Voke, Sandham and Kleiser eds, pages 163–174. Kluwer, 1999.
- [94] S. Stolz, N. A. Adams & L. Kleiser. The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent-boundary-layer interaction. *Physics of Fluids*, 13(10) : 2985–3001, 2001. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/13/2985/1>.
- [95] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue & O. Simonin. DNS of the interaction between a deformable buoyant bubble and a spatially decaying turbulence: *a priori* tests for LES two-phase flow modelling. *Submitted to Computers And Fluids*, 2006.
- [96] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue & O. Simonin. Interaction between a deformable buoyant bubble and a homogeneous isotropic turbulence. *Proceedings of Conf. on Turbulence and Interaction*, Porquerolles, France, 29 May - 2 June 2006. URL <http://www.onera.fr/congres/ti2006/program.php>.
- [97] A. Toutant, O. Lebaigue, E. Labourasse, S. Vincent, P. Lubin & D. Lacanette. Effects of turbulence on interfacial heat transfer: *a priori* tests and filters evaluation. *Proceedings of 13rd Int. Heat Transfer Conf.*, Sydney, Australia, 13-18 August 2006.
- [98] S. O. Unverdi & G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100 : 25–37, 1992.
- [99] S. Vincent, J. P. Caltagirone & O. Lebaigue. Poiseuille two-phase flow. *Multiphase Science and Technology*, 16(1–3) : 97–100, 2004.
- [100] S. Vincent, J. Larocque, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin & P. Sagaut. Direct Numerical Simulation of phase separation and a priori two-phase LES filtering. *Submitted to Computers And Fluids*, 2006.
- [101] S. K. Wang, S. J. Lee, O. C. Jr. Jones & R. T. Jr. Lahey. 3-D turbulence structure and phase distribution measurements on bubbly two-phase flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 13(3) : 327–343, 1987.
- [102] J. H. Williamson. Low storage Runge-Kutta schemes. *J. Comput. Phys.*, 35 : 48–56, 1980.
- [103] R. Kh. Zeytounian. *Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I, Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [104] D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, Boston, 1989.

Résumé Les interactions complexes entre interfaces et turbulence modifient considérablement les propriétés des écoulements. Pour tenir compte de ces interactions en minimisant le coût numérique des simulations, notre stratégie consiste à utiliser et à améliorer une méthode de SND pour développer le concept *Interface and Subgrid Scale*. ISS est un équivalent pour les écoulements diphasiques de la simulation des grandes échelles pour les écoulements monophasiques. Son objectif est de tenir compte des interactions entre interfaces et turbulence dans des modèles sous-maille. En appliquant un filtre spatial aux équations, nous avons exhibé les termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques qui nécessitent une fermeture. Grâce à des tests *a priori* réalisés sur de nombreuses SND, nous avons montré que l'hypothèse de similarités d'échelles, réinterprétée près de la discontinuité, permet de modéliser les interactions sous-maille entre interfaces et turbulence. De façon complémentaire, et à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous avons déterminé les relations de saut des grandeurs filtrées et établi l'équation de transport du lieu de ces relations de saut, *i.e.* de l'interface filtrée discontinue.

Mots-clés : écoulement diphasique, front-tracking, turbulence, SND, SGE.

Physical modelling of interactions between interfaces and turbulence

Abstract The complex interactions between interfaces and turbulence strongly impact the flow properties. Unfortunately, Direct Numerical Simulations (DNS) have to entail a number of degrees of freedom proportional to the third power of the Reynolds number to correctly describe the flow behaviour. This extremely hard constraint makes it impossible to use DNS for industrial applications. Our strategy consists in using and improving DNS method in order to develop the Interfaces and Subgrid Scales concept. ISS is a two-phase equivalent to the single-phase Large Eddy Simulation (LES) concept. The challenge of ISS is to integrate the two-way coupling phenomenon into subgrid models. Applying a space filter, we have exhibited correlations or subgrid terms that require closures. We have shown that, in two-phase flows, the presence of a discontinuity leads to specific subgrid terms. Comparing the maximum of the norm of the subgrid terms with the maximum of the norm of the advection tensor, we have found that subgrid terms related to interfacial forces and viscous effect are negligible. Consequently, in the momentum balance, only the subgrid terms related to inertia have to be closed. Thanks to *a priori* tests performed on several DNS data, we demonstrate that the scale similarity hypothesis, reinterpreted near discontinuity, provides subgrid models that take into account the two-way coupling phenomenon. These models correspond to the first step of our work. Indeed, in this step, interfaces are smooth and, interactions between interfaces and turbulence occur in a transition zone where each physical variable varies sharply but continuously. The next challenge has been to determine the jump conditions across the sharp equivalent interface corresponding to the subgrid models of the transition zone. We have used the matched asymptotic expansion method to obtain the jump conditions. The first tests on the velocity of the sharp equivalent interface are very promising.

Keywords: two-phase flow, front-tracking, turbulence, DNS, LES.